Ueber

Flächen mit sphärischen Krümmungslinien,

vom kugelgeometrischen Standpunkt aus betrachtet,

und die

entsprechenden Flächen des Linienraumes.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 12. Mai 1903

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Max Lagally

aus Regensburg.

ACAD. LUDOVIC. MAX. BIBL.

München 1903.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552320_0040

Einleitung.

Sophus Lie hat in einer bekannten, im 5. Band der mathematischen Annalen erschienenen Arbeit „Ueber Komplexe“ einen interessanten Zusammenhang zwischen den Geraden eines Raumes und den Kugeln eines anderen Raumes klargelegt und ein Formelsystem aufgestellt, das den Uebergang von der „Liniengeometrie“ zur „Kugelgeometrie“ analytisch festlegt. Gleichzeitig und von Lie angeregt hat Felix Klein denselben Gegenstand von einem andern Gesichtspunkt aus behandelt und die Transformation in anderer Weise analytisch formuliert. Der Wechsel des Raumelementes tritt hier deutlicher zu Tage, während bei Lie's analytischer Formulierung die wesentliche Eigenschaft der Transformation, eine Berührungstransformation zu sein, in den Vordergrund gestellt ist.

Wie Lie gezeigt hat, gehen bei dieser Transformation die Haupttangentenkurven einer Fläche in die Krümmungslinien der entsprechenden Fläche der Kugelgeometrie über. Ferner hat Lie auf geometrischem Wege nachgewiesen, dass zwischen den Regelflächen und Röhrenflächen, speziell zwischen den Regelflächen 2. Ordnung und der Dupinschen Cyklide die besprochene Beziehung besteht, ebenso zwischen der Kummerschen Fläche und gewissen Flächen 4. Ordnung, die den ∞ fernen Kugelkreis doppelt enthalten. Weitere wesentlich allgemeinere Beispiele sind meines Wissens nicht bekannt geworden.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun, die geometrischen Eigenschaften und die analytische Darstellung derjenigen Flächen des Linienraumes aufzufinden, die denjenigen Flächen des Kugelraumes entsprechen, welche ein System sphärischer Krümmungslinien besitzen.

Die zahlreichen Untersuchungen[1]) über Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien, die sich in der mathematischen Literatur finden, und in denen teils Punkt- teils Ebenen-Koordinaten zur Bestimmung der Flächen angewendet sind, erweisen sich zur Behandlung der vorliegenden Aufgabe wenig brauchbar. Ich habe, um die entsprechenden Flächen des Linienraumes liniengeometrisch auffassen zu können, den Versuch gemacht, die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien kugelgeometrisch zu betrachten; d. h. ich habe die Kugel als Raumelement gewählt und eine Methode angewendet, die der von Darboux zur Bestimmung der Flächen mit zwei Systemen sphärischer Krümmungslinien angewandten Methode[2]) ähnlich ist.

Bemerkt sei noch, dass alle Versuche, die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu bestimmen, die ein gegebenes Kugelsystem unter gegebenem Winkel scheiden, auf Differentialgleichungen führen, von denen nur in speziellen Fällen Integrale durch Quadraturen zu ermitteln sind, während es anderseits möglich ist, alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien anzugeben und nachher die erwähnten Kugeln und Schnittwinkel durch Differentiationsprozesse zu bestimmen.

Die vorliegende Arbeit vertritt im I. Teil den ersten Standpunkt, während im II. Teil auch der zweite Standpunkt zur Geltung kommt, insbesondere auch bei dem Versuch, die entsprechenden Flächen des Linienraumes aus ihrer geometrisch charakteristischen Eigenschaft analytisch zu bestimmen.

Die Anregung zur Arbeit empfing ich von Herrn Universitätsprofessor Dr. F. Lindemann, dem ich hiefür, wie für vielfache wohlwollende Unterstützung während der Ausführung zu wärmstem Danke verpflichtet bin.

---

[1]) Insbes. Enneper, Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 23 u. 26. — Darboux, leçons sur la théorie générale des surfaces t. IV. chap. IX. u. XI. — Cossérat, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, t. IV pag. 18. — Waelsch, Sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques. Comptes rendues 128, pag. 920—922.

[2]) Darboux, leçons t. IV. pag. 256—266.

I. Teil.

§ 1.

Zusammenhang zwischen Linien- und Kugelgeometrie.

Bezeichnet man mit $x_i\,(i = 1, 2 \ldots 6)$ die von Klein eingeführten Linienkoordinaten, die der Gleichung

$$\Omega(x) \equiv \sum_1^6{}^i x_i^2 = 0$$

genügen, so ist die Gleichung eines linearen Komplexes:

1)
$$\sum_1^6{}^i u_i x_i = 0$$

Ist der Komplex kein spezieller, so ist

$$\sum_1^6{}^i u_i^2 \neq 0$$

also sind auch die 6 „Fundamentalkomplexe" keine speziellen.

Die Leitlinien der durch 2 lineare Komplexe

$$\sum_1^6{}^i u_i x_i = 0, \qquad \sum_1^6{}^i v_i x_i = 0$$

bestimmten Kongruenz erster Ordnung und Klasse sind die Achsen der beiden speziellen Komplexe, die dem Büschel

$$\sum_1^6{}^i (u_i + \lambda v_i) x_i = 0$$

angehören. λ bestimmt sich also aus der quadratischen Gleichung:

$$\Omega(u + \lambda v) = \sum_1^6 (u_i + \lambda v_i)^2 = 0$$

und die Koordinaten der Leitlinien sind (für $i = 1, 2 \ldots 6$):

2)
$$u_i + \lambda_{1,2} v_i$$
$$= u_i + v_i \frac{1}{\sum_1^6 {}_k v_k^2} \left[- \sum_1^6 {}_k u_k v_k \pm \sqrt{(\sum_1^6 {}_k u_k v_k)^2 - \sum_1^6 {}_k u_k^2 \sum_1^6 {}_k v_k^2} \right]$$

Wir haben uns im folgenden meist mit Kongruenzen von der Form:

3)
$$\left.\begin{aligned} \sum_1^6 {}_i u_i x_i &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} \sum_1^5 {}_i u_i x_i &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

zu beschäftigen, die „ausgezeichnete Kongruenzen“ heissen sollen; der Komplex:

$$x_6 = 0$$

soll ebenfalls als „ausgezeichneter Komplex“ bezeichnet werden. Die Koordinaten der Leitlinien einer solchen Kongruenz sind nach (2)

4)
$$m_i = u_i \quad (i = 1, 2 \ldots 5)$$
$$m_6 = \pm \sqrt{- \sum_1^5 {}_k u_k^2}$$

Die beiden Leitlinien repräsentieren uns die Kongruenz; da sie in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugiert sind, also eine durch die andere bestimmt ist, genügt es, eine von ihnen zu betrachten,

Wenden wir nun auf eine ausgezeichnete Kongruenz die von Klein angegebenen Transformationsformeln an:

$$
\begin{aligned}
\varrho\, x_1 &= \xi_1\, \xi_4 \\
\varrho\, x_2 &= \xi_2\, \xi_4 \\
\varrho\, x_3 &= \xi_3\, \xi_4 \\
\varrho\,(x_4 + i\, x_5) &= \xi_4^2 \\
\varrho\,(x_4 - i\, x_5) &= -\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

in denen ϱ einen Proportionalitätsfaktor und ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die homogenen Koordinaten der Punkte des Kugelraumes bedeuten, so geht sie in eine Kugel über, deren Gleichung folgende Form annimmt:

$$
\sum_1^3{}_i \left(\xi_i - \frac{u_i\, \xi_4}{u_4 + i\, u_5} \right)^2 - \frac{\sum_1^5{}_k\, u_k^2}{(u_4 + i\, u_5)^2}\, \xi_4^2 = 0 \tag{6}
$$

Ist

$$u_4 + i\, u_5 = 0$$

so artet die Kugel in eine Ebene aus.

Bezeichnet man mit A_i $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel, mit R ihren Radius, mit T^2 die Potenz des Koordinatenanfangspunktes, und mit μ einen Proportionalitätsfaktor, so ergibt sich, dass die 5 Grössen u_i und somit auch die 6 Grössen m_i, die Koordinaten der Leitlinien, eine einfache geometrische Bedeutung haben, wenn man zur „Kugelgeometrie“ übergeht:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \mu \cdot A_1 \qquad & m_4 &= \mu \cdot \frac{1 - T^2}{2} \\
m_2 &= \mu \cdot A_2 \qquad & m_5 &= \mu \cdot \frac{-\,i}{2}\,(1 + T^2) \\
m_3 &= \mu \cdot A_3 \qquad & m_6 &= (\pm)\, \mu \cdot i \cdot R.^1)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Im Falle einer Ebene, in dem auch

$$m_4 + i\, m_5 = 0$$

is, werden die Koordinaten:

---

[1]) Das doppelte Vorzeichen kann z. B. dazu dienen, zwischen „Innenkugel“ und „Aussenkugel“ zu unterscheiden. Im folgenden wird nur mit einem Vorzeichen gerechnet, aber immer mit demselben.

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \mu \cos \alpha_1 & m_4 &= -\mu p \\
m_2 &= \mu \cos \alpha_2 & m_5 &= -\mu \cdot i \cdot p \\
m_3 &= \mu \cos \alpha_3 & m_6 &= (\pm)\, \mu \cdot i
\end{aligned} \tag{7a}
$$

wo $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, $\cos \alpha_3$ und p die Koeffizienten der Ebene in der Hesseschen Normalform sind.

Wir fassen nun die Gleichungen (3)

$$\sum_1^6 u_i x_i = 0, \quad x_6 = 0 \ ^{1})$$

die uns die ausgezeichnete Kongruenz und ihre Leitlinien darstellten, direkt auch als Gleichungen der entsprechenden Kugel auf.

Gehen wir nun zu den Transformationsformeln[2]) von Lie selbst über. Es seien x_1, x_2, x_3 die Punktkoordinaten im „Linienraum", ξ_1, ξ_2, ξ_3 im „Kugelraum", so lauten diese Formeln, die eine Berührungstransformation vermitteln:

$$
\begin{cases}
\xi_1 + i\,\xi_2 + x_1\,\xi_3 + x_3 = 0 \\
x_1\,(\xi_1 - i\,\xi_2) - \xi_3 - x_2 = 0
\end{cases} \tag{8}
$$

Nun ist eine Gerade mit den Plückerschen Linienkoordinaten p_{ik}, die der Gleichung:

$$P \equiv p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0$$

genügen, in Punktkoordinaten durch 2 von den folgenden 3 Gleichungen bestimmt:

$$
\begin{aligned}
p_{12} &= x_2\,p_{14} - x_1\,p_{24} \\
p_{13} &= x_3\,p_{14} - x_1\,p_{34} \\
p_{23} &= x_3\,p_{24} - x_2\,p_{34}
\end{aligned} \tag{9}
$$

---

[1]) In „pentasphärischen" Koordinaten: $\sum_1^5 u_i x_i = 0$.

[2]) Diese Formeln finden sich in dem Werk: Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen. In der Originalabhandlung erscheinen sie in einer etwas anderen Form, in einer 3. bei Darboux.

Eliminiert man x_1, x_2, x_3 mit Hilfe der Transformationsformeln, so ergibt sich die Gleichung der der Geraden entsprechenden Kugel:

10)
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_1 \frac{p_{24} - p_{13}}{p_{14}} - i\,\xi_2 \frac{p_{24} + p_{13}}{p_{14}} + \xi_3 \frac{p_{12} + p_{34}}{p_{14}} = \frac{p_{23}}{p_{14}}$$

Diese Gleichung kann mit der Gleichung (6) der Kugel, die der Kongruenz (3)

$$\sum_1^6 u_i x_i = 0 \qquad x_6 = 0$$

und ihren Leitlinien entspricht, in Uebereinstimmung gebracht werden, wenn man die p_{ik} so wählt, dass folgende Gleichungssysteme bestehen:

11)
$$\begin{aligned}
m_1 &= \nu\,(p_{24} - p_{13}) & p_{12} &= \lambda\,(\mp i\,m_6 - m_3)\\
m_2 &= \nu\,i\,(p_{24} + p_{13}) & p_{13} &= \lambda\,(-m_1 - i\,m_2)\\
m_3 &= \nu\,(-p_{12} - p_{34}) & p_{23} &= \lambda\,(m_4 - i\,m_5)\\
m_4 &= \nu\,(p_{14} + p_{23}) & p_{14} &= \lambda\,(m_4 + i\,m_5)\\
m_5 &= \nu\,i\,(p_{23} - p_{14}) & p_{24} &= \lambda\,(m_1 - i\,m_2)\\
m_6 &= \pm\,\nu\,i\,(p_{12} - p_{34}) & p_{34} &= \lambda\,(\pm i\,m_6 - m_3)
\end{aligned}$$

Dabei sind ν und λ Proportionalitätsfaktoren.

Vertauscht man die Indices der p_{ik} in geeigneter Weise, so nehmen die Lieschen Transformationsformeln andere Formen an.

Wir betrachten nun 2 ausgezeichnete Kongruenzen:

$$\left.\begin{aligned}\textstyle\sum_1^6 u_i x_i &= 0\\ x_6 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\textstyle\sum_1^6 v_i x_i &= 0\\ x_6 &= 0\end{aligned}\right\}$$

und das von ihnen gebildete Büschel

$$\sum_1^6 (u_i + \lambda\, v_i)\, x_i = 0, \quad x_6 = 0$$

und suchen diejenigen Kongruenzen des Büschels, deren Leitlinien dem ausgezeichneten Komplex angehören, also zusammenfallen. Das Doppelverhältnis Δ zweier Kongruenzen mit den

speziellen Kongruenzen des Büschels ist aber auch das Doppelverhältnis der entsprechenden Kugeln mit den Punktkugeln des durch sie gebildeten Büschels, definiert also ihren Winkel.

$$\varphi = \frac{i}{2} lg \Delta$$

Da nun die 6. Koordinate der Leitlinien der speziellen Kongruenzen 0 sein soll, ist:

$$\sum_1^5{}_i (u_i + \lambda v_i)^2 = 0$$

12)
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sum_1^5{}_k v_k^2} \left[- \sum_1^5{}_k u_k v_k \pm \sqrt{(\sum_1^5{}_k u_k v_k)^2 - \sum_1^5{}_k u_k^2 \sum_1^5{}_k v_k^2} \right].$$

Nun ist

13)
$$\Delta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-\sum_1^5{}_k u_k v_k \pm \sqrt{(\sum_1^5{}_k u_k v_k)^2 - \sum_1^5{}_k u_k^2 \sum_1^5{}_k v_k^2}}{-\sum_1^5{}_k u_k v_k \mp \sqrt{(\sum_1^5{}_k u_k v_k)^2 - \sum_1^5{}_k u_k^2 \sum_1^5{}_k v_k^2}}$$

daraus ist leicht zu berechnen:

13a)
$$\pm \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{\sum_1^5{}_k u_k v_k}{\sqrt{\sum_1^5 u_k^2 \cdot \sum_1^5 v_k^2}}$$

Das ist dieselbe Formel, die Darboux für „pentasphärische" Koordinaten auf dem Wege der Anschauung abgeleitet hat.

Betrachten wir nun einen linearen Linienkomplex und den entsprechenden Kugelkomplex, die beide durch die Gleichung:

14)
$$\sum_1^6{}_i u_i m_i = 0$$

dargestellt sind; dabei ist

$$\Omega(m) = \sum_1^6{}_k \, m_k^2 = 0$$

$$\Omega(u) = \sum_1^6{}_k \, u_k^2 \begin{cases} \gtrless 0 \\ = 0 \end{cases}$$

je nachdem die betrachteten Komplexe allgemeine oder spezielle sind.

Jeder Geraden

15) $$\sum_1^6{}_i \, m_i \, x_i = 0$$

des Linienkomplexes entspricht zusammen mit ihrer in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugierten die Kugel:

15a) $$\sum_1^5{}_i \, m_i x_i = 0, \quad x_6 = 0$$

Die Punktkugeln des linearen Kugelkomplexes erfüllen eine Kugel, die „Grundkugel“:

16) $$\sum_1^5{}_i \, u_i x_i = 0 \quad x_6 = 0$$

der im Linienraum die Kongruenz des vorliegenden mit dem ausgezeichneten Komplex, und ihre Leitlinien entsprechen. Der Winkel der Kugeln des Komplexes mit der Grundkugel ist bekanntlich konstant; die obige Formel (13a) liefert uns einen einfachen Ausdruck:

17) $$\pm \cos\varphi = \frac{\sum_1^5{}_k \, u_k \, m_k}{\sqrt{\sum_1^5{}_k \, u_k^2} \sqrt{\sum_1^5{}_k \, m_k^2}} = \frac{i \, u_6}{\sqrt{\sum_1^5{}_k \, u_k^2}}$$

Jetzt lassen sich die Koordinaten des Komplexes in einfacher Weise durch die Koordinaten der Grundkugel und den Winkel φ ausdrücken, wenn wir noch einen Proportionalitätsfaktor μ einführen:

$$u_1 = \mu \cdot A_1 \qquad u_4 = \mu \frac{1-T^2}{2}$$

18) $$u_2 = \mu\, A_2 \qquad u_5 = \mu \frac{-i}{2}(1+T^2)$$

$$u_3 = \mu\, A_3 \qquad u_6 = \mu \cdot i\, R \cos\varphi$$

Ferner

18a) $$\sqrt{\sum_1^6{}_k\, u_k^2} = \mu\, R \sin\varphi$$

Artet die Grundkugel in eine Ebene aus, so ist

$$u_1 = \mu \cos\alpha_1 \qquad u_4 = -\mu p$$
$$u_2 = \mu \cos\alpha_2 \qquad u_5 = -\mu\, i\, p$$

18b) $$u_3 = \mu \cos\alpha_3 \qquad u_6 = \mu\, i \cos\varphi$$

$$\sqrt{\sum_1^6{}_k\, u_k^2} = \mu \sin\varphi$$

§ 2.

Linien- und Kugel-Kongruenzen; ihre Brennflächen

Wir beschränken uns auf die Betrachtung solcher Linien- und Kugelkongruenzen, auf deren beiden Brennflächen die Haupttangentenkurven, bezw. Krümmungslinien einander entsprechen. Strahlensysteme dieser Art werden als W-Kongruenzen[1]) bezeichnet; der gleiche Name soll der Kürze halber auch für die entsprechenden Kugelkongruenzen gelten.

Ein W-Strahlensystem geht durch die Liesche Transformation in eine W-Kugelkongruenz über.

Wie Darboux im II. Band Kap. XV. der „leçons sur la théorie générale des surfaces“ nachweist, hat eine Kongruenz die verlangte Eigenschaft, wenn die 6 homogenen, von 2 Parametern u und v abhängigen Koordinaten der erzeugenden Kugeln oder Geraden derselben linearen partiellen Differentialgleichung

[1]) Bianchi, Kap. 12.

2. Ordnung genügen, die, wenn man die Krümmungslinien, bez. Haupttangentenkurven der Brennflächen zu Parameterkurven wählt, die folgende Normalform annimmt:

$$1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial v} + \nu \theta = 0$$

für $\theta = m_1, m_2, \ldots m_6$.

Man sieht leicht ein, dass diese 6 homogenen Koordinaten nicht gleichzeitig mehreren linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung genügen können (wie etwa die Punktkoordinaten einer Fläche). Denn wenn die 6 homogenen Koordinaten Integrale zweier solcher Gleichungen

$$D_1 = 0 \text{ und } D_2 = 0$$

und also jeder Gleichung

$$D = a_1 D_1 + a_2 D_2 = 0$$

wären, so könnte man für jeden Wert von $\frac{a_2}{a_1}$ ein paar unabhängige Veränderliche angeben, durch deren Einführung die Gleichung auf die Normalform gebracht würde.[1]) Dann müsste aber jede Kurve der Fläche eine Krümmungslinie sein.

Hat man nun 6 Integrale m_i der Gleichung (1), die der Gleichung

$$\Omega(m) = \sum_1^6{}_k m_k^2 = 0$$

genügen, so sei zur Abkürzung:

$$E = \sum_1^6{}_k \left(\frac{\partial m_k}{\partial u}\right)^2$$

$$2) \qquad \Phi = \sum_1^6{}_k \frac{\partial m_k}{\partial u} \frac{\partial m_k}{\partial v} = -\sum_1^6{}_k m_k \frac{\partial^2 m_k}{\partial u \partial v}$$

$$\Gamma = \sum_1^6{}_k \left(\frac{\partial m_k}{\partial v}\right)^2$$

[1]) Man vergl. z. B. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen pag. 427.

Multipliziert man nun die 6 Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 m_i}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial m_i}{\partial u} + \mu \frac{\partial m_i}{\partial v} + \nu m_i = 0$$

nacheinander mit m_i, $\frac{\partial m_i}{\partial u}$ und $\frac{\partial m_i}{\partial v}$ und addiert jedesmal, so ergeben sich folgende 3 Gleichungen:

$$\Phi \equiv \sum_1^6{}_k \frac{\partial m_k}{\partial u} \frac{\partial m_k}{\partial v} = 0$$

3)
$$\lambda = -\frac{\partial lg \sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\mu = -\frac{\partial lg \sqrt{\Gamma}}{\partial u}$$

Dann kann die Differentialgleichung in folgende Form gebracht werden:

4)
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial lg \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial lg \sqrt{\Gamma}}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \nu \theta = 0$$

Setzt man

$$\theta = \varrho \cdot \theta'$$

und versteht unter ϱ ein partikuläres Integral der Gleichung (4), so geht sie in die folgende über:

5)
$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial lg \sqrt{E}}{\partial v} \frac{}{\varrho}\right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} - \left(\frac{\partial lg \sqrt{\Gamma}}{\partial u} \frac{}{\varrho}\right) \frac{\partial \theta'}{\partial v} = 0$$

Diese Gestalt nimmt die Gleichung z. B. an, wenn man folgende Normalform der Koordinaten einführt:

6)
$$\bar{m}_k = \frac{m_k}{m_4 + i m_5}$$

dann wird, wie man sich leicht überzeugt:

7)
$$E = \frac{E}{(m_4 + i m_5)^2}, \quad \bar{\Phi} = 0, \quad \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{(m_4 + i m_5)^2}$$

In dem Ausnahmefall:

$$m_4 + i\, m_5 = 0$$

sei die Normalform:

6a) $$m_k = \frac{m_k}{i\, m_6}$$

also ebenso:

7a) $$\bar{E} = \frac{E}{-m_6^2} \quad \Phi = 0 \quad \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{-m_6^2}$$

die Koordinaten haben hier wie im allgemeinen Fall eine einfache geometrische Bedeutung.

Da nun die Normale in einem Punkt der Brennfläche durch den Mittelpunkt der in diesem Punkt berührenden Kugel geht, so ist, wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Punktkoordinaten und Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 die Richtungskosinuse der Normalen der Brennfläche sind:

8) $$\bar{m}_i = \xi_i - R\, \Xi_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

also

8a)
$$\frac{\partial \bar{m}_i}{\partial u} = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - R \frac{\partial \Xi_i}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial u} \Xi_i$$
$$\frac{\partial \bar{m}_i}{\partial v} = \frac{\partial \xi_i}{\partial v} - R \frac{\partial \Xi_i}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v} \Xi_i$$

daraus folgt:

9)
$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial \bar{m}_i}{\partial u} \Xi_i + \frac{\partial R}{\partial u} = 0$$
$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial \bar{m}_i}{\partial v} \Xi_i + \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Relationen:

$$\sum_1^3{}_i \Xi_i^2 = 1$$

$$\frac{\partial \bar{m}_6}{\partial u} = i \frac{\partial R}{\partial u} \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{m}_4}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{m}_5}{\partial u}\right)^2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

die Grössen Ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ berechnen; dann ist

8a) $$\xi_i = \bar{m}_i + R\,\Xi_i$$

Auf die Durchführung der ebenso einfachen wie weitläufigen Rechnung soll hier verzichtet werden; es ergibt sich:

9) $$\Xi_k = \frac{-i\left[\frac{\partial \bar{m}_k}{\partial u}\frac{\partial \bar{m}_6}{\partial u}F + \frac{\partial \bar{m}_k}{\partial v}\frac{\partial \bar{m}_6}{\partial v}E\right] \pm \left(\frac{\partial \bar{m}_{k+1}}{\partial u}\frac{\partial \bar{m}_{k+2}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{m}_{k+1}}{\partial v}\frac{\partial \bar{m}_{k+2}}{\partial u}\right)\sqrt{\bar{E}\bar{F}}}{\bar{E}\bar{F} - \bar{E}\left(\frac{\partial \bar{m}_6}{\partial v}\right)^2 - F\left(\frac{\partial \bar{m}_6}{\partial u}\right)^2}$$

Führt man Beltramische Differentialparameter[1]) ein, so nimmt dieser Ausdruck folgende Form an:

9a) $$\Xi_k = \frac{-i\,V(\bar{m}_k, \bar{m}_6) + \sqrt{\Delta_1(\bar{m}_{k+1})\,\Delta_1(\bar{m}_{k+2}) - V^2(\bar{m}_{k+1}, \bar{m}_{k+2})}}{1 - \Delta_1(\bar{m}_6)}$$

Dabei sind Δ_1 und V bezüglich der Differentialform

$$\bar{f} = E\,du^2 + F\,dv^2$$

gebildet.

Gehen wir von der Normalform auf allgemeine Koordinaten zurück, so folgt, wenn man $(m_4 + i\,m_5)$ durch m_0 ersetzt:

9b) $$\Xi_k = \frac{-i\,V\left(\frac{m_k}{m_0}, \frac{m_6}{m_0}\right) + \sqrt{\Delta_1\left(\frac{m_{k+1}}{m_0}\right)\Delta_1\left(\frac{m_{k+2}}{m_0}\right) - V^2\left(\frac{m_{k+1}}{m_0}, \frac{m_{k+2}}{m_0}\right)}}{1 - \Delta_1\left(\frac{m_6}{m_0}\right)}$$

Dabei sind Δ_1 und V bezüglich der Form:

$$f = \frac{E}{m_0^2}\,du^2 + \frac{F}{m_0^2}\,dv^2$$

gebildet.

Um nun die Brennflächen der entsprechenden Linienkongruenzen aufzufinden, könnte man einfach die Lieschen

[1]) cf. z. B. das 2. Kapitel von Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie.

Transformationsformeln anwenden; man erhält jedoch symmetrischere Formeln und insbesondere vollständiges Entsprechen der beiden Brennflächenmäntel in jeder Richtung der Transformation, wenn man von dem Strahlensystem selbst ausgeht. Da die Bedingung der Berührung benachbarter Kugeln und des Schneidens aufeinanderfolgender Geraden:

$$\sum_{1}^{6} i \, d m_i^2 = E \, d u^2 + \Gamma d v^2 = 0$$

ist, so bestimmen die Richtungen

11) $$\frac{d u}{d v} = \pm i \sqrt{\frac{\Gamma}{E}}$$

die beiden Scharen von abwickelbaren Flächen des Strahlensystems.

Nun ergeben sich aus den Gleichungen (9) des § 1 und aus den daraus durch Differentiation entstandenen Gleichungen die Punktkoordinaten der Brennflächen des Strahlensystems:

12)
$$x_1 : x_2 : 1 =$$
$$(p_{12} \, d p_{14} - p_{14} \, d p_{12}) : (p_{12} \, d p_{24} - p_{24} \, d p_{12}) : (p_{14} \, d p_{24} - p_{24} \, d p_{14})$$
$$x_1 : x_3 : 1 =$$
$$(p_{13} \, d p_{14} - p_{14} \, d p_{13}) : (p_{13} \, d p_{34} - p_{34} \, d p_{13}) : (p_{14} \, d p_{34} - p_{34} \, d p_{14})$$
$$x_2 : x_3 : 1 =$$
$$(p_{23} \, d p_{24} - p_{24} \, d p_{23}) : (p_{23} \, d p_{34} - p_{34} \, d p_{23}) : (p_{24} \, d p_{34} - p_{34} \, d p_{24})$$

dabei ist, wenn λ einen Proportionalitäts-Faktor bedeutet:

$$\lambda \, d p_{ik} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial u} \sqrt{-\Gamma} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial v} \sqrt{E}$$

Genau ebenso erhält man die Verhältnisse der Ebenenkoordinaten, wenn man die p_{ik} durch die $q_{ik} = p_{lm}$ ersetzt; dann ist aber

$$\lambda \, d q_{ik} = \frac{\partial q_{ik}}{\partial u} \sqrt{-\Gamma} + \frac{\partial q_{ik}}{\partial v} \sqrt{E}.$$

Die Liesche Transformation verwandelt reelle Flächen stets in imaginäre; man kann jedoch durch Einführung neuer, komplexer unabhängiger Veränderlichen stets erreichen, dass die transformierte Fläche unter reeller Form erscheint. Geht man von der Kugelgeometrie aus, so gehen die Minimalkurven einer Fläche in die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen desjenigen Strahlensystems über, das dem ausgezeichneten Komplex angehört und die transformierte Fläche zur Brennfläche hat. Führt man also auf der gegebenen Fläche solche Parameter ein, dass die Parameter ihrer Minimalkurven reell werden, so nimmt auch die transformierte Fläche eine reelle Gestalt an, weil auf ihr ein doppeltes System reeller Kurven reell dargestellt ist.

Es bedeuten:

m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6

in der Kugelgeometrie:

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \frac{1-T^2}{2} \quad -i\frac{1+T^2}{2} \quad iR$$

in der Liniengeometrie:

$$(p_{24}-p_{13}) \; i(p_{24}+p_{13}) \; -(p_{12}+p_{34}) \; (p_{14}+p_{23}) \; i(p_{23}-p_{14}) \; +i(p_{12}-p_{34})$$

bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der komplex sein kann. Von diesen abgesehen, müssen also in der Kugelgeometrie:

m_5 und m_6

in der Liniengeometrie:

m_2, m_5 und m_6

rein imaginär, die übrigen Grössen m_i reell sein.

§ 3.

Kugel-Kongruenzen, deren Brennflächen ebene oder sphärische Krümmungslinien $u = \text{const}$ haben.

Hat eine Fläche eine sphärische (oder ebene) Krümmungslinie $u = \text{const}$, so wird die Kugel, auf der die Krümmungslinie liegt, von der Fläche nach dem Satz von

Joachimsthal längs der ganzen Krümmungslinie unter konstantem Winkel geschnitten. Also wird sie auch von den ∞^2 Kugeln, die die Fläche längs der Krümmungslinien berühren, unter demselben konstanten Winkel geschnitten und ist demnach die Grundkugel eines linearen Kugelkomplexes, dem die ∞^2 Berührungskugeln angehören. — Diese Bemerkung ist die Grundlage der folgenden Untersuchung.

Da wir infolge der Einführung eines linearen Kugelkomplexes auf dem Standpunkt der höheren Kugelgeometrie stehen, erscheint uns die Ebene einfach als Kugel, die dem Komplex

$$m_4 + i\, m_5 = 0$$

angehört, jedoch nicht als Ausartung der Kugel. Der Begriff: „Ebene Krümmungslinie“ fällt also hier unter den Begriff: „Sphärische Krümmungslinie“; wenn also im folgenden von sphärischen Krümmungslinien die Rede ist, so ist die Möglichkeit, dass diese Krümmungslinien eben sind, mit inbegriffen, ohne dass die Formeln für diesen Fall reduziert zu werden brauchen.

Hat nun eine Fläche sphärische Krümmungslinien $u = \text{const}$, so kann man in jedem Punkt der Fläche auf ∞ viele Weise eine berührende Kugel konstruiert denken, derart, dass sich je 2 längs einer Krümmungslinie $v = \text{const}$ aufeinander folgende Berührungskugeln in einem Kreis der Grundkugel schneiden, der die dem einen (oder dem ∞ benachbarten) Berührungspunkt entsprechende Krümmungslinie $u = \text{const}$ angehört. Dann schneidet aber auch die 2. Brennfläche der Kugelkongruenz jede Grundkugel unter demselben konstanten Winkel wie die erste, also nach der Umkehrung des Satzes von Joachimsthal in einer Krümmungslinie; und die Berührungspunkte des erwähnten Kreises mit den beiden Brennflächen sind einander entsprechende Punkte. Dann entsprechen sich aber auf den beiden Brennflächen nicht nur die Krümmungslinien $u = \text{const}$, sondern auch die Krümmungslinien $v = \text{const}$; denn 2 längs einer Krümmungslinie $u = \text{const}$ aufeinander-

folgende Berührungskugeln schneiden sich in einem Kreis, der den erwähnten, auf der Grundkugel liegenden Kreis in den beiden entsprechenden Punkten der Brennflächen schneidet und zwar orthogonal, weil er ihn auf der ersten Brennfläche orthogonal schneidet.

Jede Fläche mit einem System sphärischer Krümmungslinien lässt sich also als die eine Brennfläche einer W-Kugelkongruenz auffassen, deren 2. Brennfläche ebenfalls sphärische Krümmungslinien des entsprechenden Systemes hat;[1]) die 6 homogenen Koordinaten der Kugeln der Kongruenz genügen also einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Aufstellung und Integration unser nächstes Ziel ist.

Es seien $m_i(u, v)$ $(i = 1, 2 \ldots 6)$ die Koordinaten der Kugeln der Kongruenz und Berührungskugeln der Brennflächen; ferner $u_i(u)$ $(i = 1, 2 \ldots 6)$ die Koordinaten der linearen Komplexe, denen die Berührungskugeln angehören und deren Gleichung also die folgende ist:

$$1) \qquad \sum_1^6 {}_i\, u_i m_i = 0$$

dann stellen sich die Grundkugeln der linearen Komplexe in folgender Weise dar:

$$\sum_1^6 u_i(u)\, x_i = 0,\ x_6 = 0$$

Nun schneiden sich nach dem Vorausgehenden je 2 längs einer Krümmungslinie $v = \text{const}$ aufeinander folgende Kugeln der Kongruenz:

$$\sum_1^6 m_i(u, v)\, x_i = 0,\ \ x_6 = 0$$

und

$$\sum_1^6 m_i(u + du, v)\, x_i = 0,\ x_6 = 0$$

[1]) Für Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien sphärisch sind, ist eine besondere Ableitung notwendig; diese findet sich in der Darbouxschen Behandlung dieser Flächen mittels hexasphärischer Koordinaten: leçons, 4. Band, pag. 256[—266].

deren 2. sich durch

$$\sum_1^6 \frac{\partial m_i(u,v)}{\partial u} x_i = 0, \; x_6 = 0$$

ersetzen lässt, in einem Kreis der Grundkugel. Da diese drei Kugeln also einem Büschel angehören, besteht zwischen ihnen eine lineare Relation:

$$\sum_1^6 {}_i \left(u_i + \alpha m_i + \beta \frac{\partial m_i}{\partial u} \right) x_i = 0, \; x_6 = 0$$

die sich nach einem bekannten Satz über „pentasphärische" Koordinaten[1]) auch auf die Koefficienten von $x_1 x_2 \ldots x_5$ überträgt:

$$u_i + \alpha m_i + \beta \frac{\partial m_i}{\partial u} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 5).$$

Multipliziert man diese 5 Gleichungen mit m_i und addiert, so folgt unter Berücksichtigung der Relation:

$$\Omega(m) = \sum_1^6 m_i^2 = 0$$

und der Gleichung (1) die folgende Gleichung:

$$u_6 + \alpha m_6 + \beta \frac{\partial m_6}{\partial u} = 0$$

sodass also die Gleichung:

2) $$u_i + \alpha m_i + \beta \frac{\partial m_i}{\partial u} = 0$$

für $(i = 1, 2 \ldots 5, 6)$ Gültigkeit hat.

Differentiieren wir (2) nach (v), so folgt eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

3) $$\beta \frac{\partial^2 m_i}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial m_i}{\partial u} + \alpha \frac{\partial m_i}{\partial v} + \frac{\partial \alpha}{\partial v} m_i = 0$$

---

[1]) cf. Darboux, l. c.

für die 6 Kugelkoordinaten; und wir haben bewiesen, dass diese nur einer derartigen Gleichung genügen können.

Bilden wir nun die beiden Invarianten[1]) der Gleichung (3), so ergibt sich

$$4) \qquad h = \frac{\partial^2 l g \beta}{\partial u \partial v} + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$k = 0$$

und wir erkennen in letzterer Gleichung zunächst eine notwendige Bedingung dafür, dass die Brennflächen einer W-Kugelkongruenz sphärische Krümmungslinien $u = \text{const}$ haben.

Ist anderseits eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (Laplacesche Gleichung) gegeben, deren Invariante k verschwindet, so ergibt sich daraus bekanntlich durch Integration eine Gleichung von der Form (2) und wenn wir nun wissen, dass die Gleichung 6 partikuläre Integrale m_i zulässt, die der Relation $\Omega(m) = 0$ genügen, so erhält man durch Multiplikation der Zwischenintegrale (2) und darauffolgende Addition wieder die Gleichung (1), von der wir ausgegangen sind, d. h.:

Das Verschwinden der Invariante k ist für die Laplacesche Gleichung derjenigen W-Kugelkongruenzen, deren Brennflächen sphärische Krümmungslinien $u = \text{const}$ haben, charakteristisch.[2])

Kehren wir nun zur Gleichung (2) zurück, so erkennen wir, dass sie als eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung

[1]) Als Invarianten einer Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \nu \Theta = 0$$

bezeichnet man die beiden Ausdrücke: (Darboux, leçons II. pag. 23)

$$h = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \mu - \nu; \qquad k = \frac{\partial \mu}{\partial v} + \lambda \mu - \nu.$$

[2]) Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn die Kugeln der Kongruenz in Punkte ausarten, weil dann der geometrische Sinn der Gleichung (2) verschwindet. — Wir kommen auf die Laplacesche Gleichung der Punktkoordinaten zurück.

1. Ordnung aufgefasst und mittels Quadraturen integriert werden kann:

$$5) \qquad m_i = e^{-\int_{u_0}^{u} \frac{\alpha}{\beta} du} \left[\psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \frac{-u_i}{\beta} e^{\int_{u_0}^{u} \frac{\alpha}{\beta} du} du \right]$$

Dabei sind α und β bekannte Funktionen von u und v, die $\psi_i(v)$ aber arbiträre Funktionen von v für $(i = 1, 2 \ldots 6)$.

Da wir die homogenen Kugelkoordinaten aber nur bis auf einen Faktor zu bestimmen brauchen, können wir die m_i mit $e^{\int_{u_0}^{u} \frac{\alpha}{\beta} du}$ multiplizieren; setzen wir ausserdem

$$\frac{-1}{\beta} e^{\int_{u_0}^{u} \frac{\alpha}{\beta} du} = \sigma(u, v)$$

so ergibt sich die einfachere Gestalt:

$$5\,a) \qquad m_i = \psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, du$$

Dabei geht die Laplacesche Gleichung über in:

$$6) \qquad \frac{\partial^2 m_i}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial lg\, \sigma(u, v)}{\partial v} \frac{\partial m_i}{\partial u} = 0$$

oder

$$6\,a) \qquad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sigma(u, v)} \frac{\partial m_i}{\partial u} \right) = 0$$

dann ergeben sich für die Fundamentalgrössen folgende Werte:

$$7) \qquad \begin{aligned} E &= \sigma^2(u, v) \sum_1^6 u_i^2 \\ \Phi &= 0 \\ \Gamma &= \Gamma(v)^1) \end{aligned}$$

---

[1]) Auch wenn $\Gamma = 0$ ist und somit die Kongruenz aus den Krümmungskugeln $u = \text{const}$ ihrer einzigen Brennfläche besteht, würde die Invariante k verschwinden. Aber in diesem Grenzfall genügen die 6 Kugelkoordinaten keiner gemeinsamen Laplaceschen Gleichung mehr.

Die Frage nach den Flächen mit sphärischen Krümmungslinien $u = \text{const}$ ist also jetzt auf die Frage nach solchen Systemen von Funktionen $\sigma(u, v)$, $u_i(u)$ und $\psi_i(v)$ zurückgeführt, für welche die Gleichung:

$$\Omega(m_i) = \sum_1^6 (\psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, d\, u)^2 = 0$$

identisch erfüllt ist. Doch wollen wir diese Untersuchung zurückstellen und uns zunächst mit einer anderen Frage beschäftigen.

Im Anschluss hieran ergibt sich auch die Lösung des von Darboux mittels hexasphärischer Koordinaten behandelten Problems der Untersuchung der Flächen mit 2 Systemen sphärischer Krümmungslinien.[1]) Hier müssen beide Invarianten der Laplaceschen Gleichung verschwinden, die dann auf die Form

$$\frac{\partial^2 m_i}{\partial u\, \partial v} = 0$$

gebracht werden kann; die Koordinaten der Kugeln der Kongruenz erscheinen also in der Darstellung

$$m_i = U_i(u) + V_i(v) \quad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

wobei die Gleichung

$$\Omega(m) = \sum_1^6 (U_i + V_i)^2 = 0$$

identisch erfüllt sein muss.

§ 4.

Die entsprechenden Linienkongruenzen.

Fasst man die 6 Koordinaten m_i nicht als homogene Kugelkoordinaten, sondern als Kleinsche Linienkoordinaten auf, so geht die W-Kugelkongruenz in eine W-Strahlenkongruenz über, auf deren beiden Brennflächen sich die Haupttangentenkurven entsprechen.

[1]) cf. Darboux, leçons, IV. Band, pag. 256—266.

Die Gleichung (1) des § 3 sagt jetzt aus, dass diejenigen Strahlen der Kongruenz, die die Brennfläche längs, d. h. in den Punkten einer Haupttangentenkurve berühren, einem linearen Komplex angehören.

Bei den Flächen mit sphärischen Krümmungslinien $u =$ const gehören alle die ∞^2 Kugeln, die die Fläche längs einer solchen Krümmungslinie berühren, demselben linearen Komplex an wie die längs dieser Krümmungslinie berührenden ∞^1 Kugeln der W-Kongruenz, weil alle die Grundkugel unter demselben Winkel schneiden. Deshalb gehören auch in der Liniengeometrie alle die ∞^2 Tangenten, die die entsprechende Fläche in den Punkten einer Haupttangentenkurve $u =$ const berühren, einem linearen Komplex an.

Also sind die Haupttangentenkurven $u =$ const selbst dadurch ausgezeichnet, dass jede einem linearen Komplex angehört. Insbesondere sind die durch den linearen Komplex, dem eine Haupttangentenkurve angehört, den Punkten dieser Haupttangentenkurve zugeordneten Ebenen, also die Schmiegungsebenen der Komplexkurve, zugleich die Tangentialebenen der Fläche; wie ja überhaupt die Haupttangentenkurven einer Fläche dadurch charakterisiert sind, dass ihre Schmiegungsebenen Tangentialebenen der Fläche sind.

Wir fragen nach der Regelfläche, die der von den Grundkugeln einer Fläche mit sphärischen Krümmungslinien gebildeten Röhrenfläche entspricht. Einer einzelnen Grundkugel entspricht eine ausgezeichnete Kongruenz, von der wir nur die Leitlinien betrachten. Die Gleichung der Kongruenz ist

$$\sum_1^6{}_i u_i x_i = 0, \quad x_6 = 0.$$

und die Koordinaten der Leitlinien:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \pm i \sqrt{\sum_1^5{}_k u_k^2}$$

Die beiden von den Leitlinien gebildeten, in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugierten Regelflächen entsprechen

der Röhrenfläche der Grundkugeln. Konstruiert man längs einer Haupttangentenkurve $u = \text{const}$ die dem ausgezeichneten Komplex angehörigen Tangenten, so schneiden diese 2 feste, in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugierte Gerade.

Man sieht sofort, dass dieser Satz einer Verallgemeinerung fähig ist. Ordnet man jeder Haupttangenkurve nach irgend einem Gesetz noch einen 2. linearen Komplex zu, so schneiden diejenigen Tangenten der Fläche längs einer Haupttangenkurve, die dem zugeordneten linearen Komplex angehören (z. B. in einem ganz speziellen Fall einer Ebene parallel sind), ein festes Geradenpaar.

Von Wichtigkeit ist folgender Fall. Ich ordne einer Haupttangentenkurve, die dem Komplex:

$$\sum_1^6{}^i u_i(u)\, x_i = 0$$

angehört, den Komplex

$$\sum_1^6{}^i u_i(u + d\,u)\, x_i = 0$$

zu, dem die nächstfolgende Haupttangentenkurve angehört. oder statt dessen den linearen Komplex:

$$\sum_1^6{}^i u_i'\, x_i = 0 \qquad \left(u_i' = \frac{\partial\, u_i}{\partial\, u}\right)$$

Diejenigen Tangenten der Fläche, die beiden Komplexen

$$\sum_1^6{}^i u_i x_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_1^6{}^i u_i'\, x_i = 0$$

angehören, sind die Haupttangenten des Systemes $v = \text{const}$ längs einer Haupttangentenkurve $u = \text{const}$: sie schneiden nach dem Vorigen ein Geradenpaar, dessen Koordinaten nach § 1

$$u_i + \lambda_{1,2} u_i'$$

sind; dabei ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sum_1^6{}_k u_k u'_k \pm \sqrt{\left(\sum_1^6 u_k u'_k\right)^2 - \sum_1^6{}_k u_k^2 \sum_1^6{}_k u_k'^2}}{\sum_1^6{}_k u_k'^2}$$

Der entsprechende Satz der Kugelgeometrie würde lauten: Sind die Krümmungslinien u einer Fläche sphärisch und konstruiert man längs einer Krümmungslinie u die Krümmungskugeln v, so berühren diese 2 feste Kugeln.[1])

Schliesslich wollen wir noch den Satz in die Liniengeometrie übertragen, der uns zur Einführung der W-Kugelkongruenzen verholfen hatte, deren Brennflächen sphärische Krümmungslinien haben:

Gehört jede Haupttangentenkurve $u = \text{const}$ einer Fläche einem linearen Komplex

$$\sum_1^6{}_i u_i x_i = 0$$

an, so kann man (auf beliebig viele Weise) in jedem Punkt der Fläche eine Tangente angeben, derart, dass die in den Punkten u, v und $u + du, v$ einer Haupttangentenkurve v bestimmten Tangenten aus den Strahlen der ausgezeichneten Kongruenz

$$\sum_1^6{}_i u_i x_i = 0, \qquad x_6 = 0$$

die nämliche, ein Hyperboloid bildende Regelschar ausschneiden. Die so bestimmten Tangenten der Fläche bilden dann ein W-Strahlensystem, auf dessen 2. Brennfläche die Haupttangentenkurven u denselben linearen Komplexen angehören wie auf der ersten.

Kennt man nun die Koordinaten

$$m_i = \psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, du$$

[1]) E. Blutel: Sur les lignes de courbure de certaines surfaces. Comptes rendues 128, pag. 289—291.

einer Kugelkongruenz, deren Brennflächen sphärische Krümmungslinien haben und der entsprechenden Linienkongruenz, auf deren Brennflächen die Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören, so kann man nach den früheren Formeln die Punkt- und Ebenenkoordinaten der Brennflächen beider Kongruenzen vollständig angeben.

Setzt man zur Abkürzung

$$m_i = \int \sigma u_i \, du$$

$$m_4 + i m_5 = m_0, \quad u_4 + i u_5 = u_0$$

so erhält man unter Anwendung der bisherigen Bezeichnungen für die Brennflächen der Kugelkongruenz:

$$\xi_k = \frac{m_k - i m_6 \Xi_k}{m_0}$$

$$= \frac{\int \sigma u_k \, du - i \int \sigma u_6 \, du \, \Xi_k}{\int \sigma u_0 \, du}$$

$$\Xi_k \left[1 - \Delta_1 \left(\frac{\int \sigma u_6 \, du}{\int \sigma u_0 \, du} \right) \right] = - i \Gamma \left(\frac{\int \sigma u_k \, du}{\int \sigma u_0 \, du}, \frac{\int \sigma u_6 \, du}{\int \sigma u_0 \, du} \right)$$

$$\pm \sqrt{\Delta_1 \left(\frac{\int \sigma u_{k+1} \, du}{\int \sigma u_0 \, du} \right) \Delta_1 \left(\frac{\int \sigma u_{k+2} \, du}{\int \sigma u_0 \, du} \right) - \Gamma^2 \left(\frac{\int \sigma u_{k+1} \, du}{\int \sigma u_0 \, du}, \frac{\int \sigma u_{k+2} \, du}{\int \sigma u_0 \, du} \right)}$$

Dabei sind die Differentialparameter bezüglich der Form:

$$\frac{\sigma^2 \sum_1^6 i u_i^2}{(\int \sigma u_0 \, du)^2} \, du^2 + \frac{I'(v)}{(\int \sigma u_0 \, du)^2} \, dv^2$$

zu bilden.

Gehen wir nun zur Liniengeometrie über und bezeichnen die Punktkoordinaten der Brennflächen mit x, y, z, so folgt nach den Formeln (12) des § 2:

$$x : y : 1$$

$$= \{\int \sigma(-iu_6 - u_3)\,du\,[(u_4+iu_5)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_4+iu_5)\,du \sqrt{\sum_1^6 u_k^2}]$$

$$- \int \sigma(u_4+iu_5)\,du\,[(-iu_6-u_3)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(-iu_6-u_3)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$: \{\int \sigma(-iu_6-u_3)\,du\,[(u_1-iu_2)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_1-iu_2)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma(u_1-iu_2)\,du\,[(-iu_6-u_3)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(-iu_6-u_3)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$: \{\int \sigma(u_4+iu_5)\,du\,[(u_1-iu_2)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_1-iu_2)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma(u_1-iu_2)\,du\,[(u_4+iu_5)\sqrt{-1} + \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_4+iu_5)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$x : z : 1$$

$$-\{\int \sigma(-u_1-iu_2)\,du\,[(u_4+iu_5)\sqrt{-1} + \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_4+iu_5)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma(u_4+iu_5)\,du\,[(-u_1-iu_2)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(-u_1-iu_2)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$: \{\int \sigma(-u_1-iu_2)\,du\,[(iu_6-u_3)\sqrt{-1} + \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(iu_6-u_3)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma(iu_6-u_3)\,du\,[(-u_1-iu_2)\sqrt{-1} + \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(-u_1-iu_2)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$: \{\int \sigma(u_4+iu_5)\,du\,[(iu_6-u_3)\sqrt{-1} \pm \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(iu_6-u_3)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma(iu_6-u_3)\,du\,[(u_4+iu_5)\sqrt{-1} + \int \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_4+iu_5)\,du\sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$y : z : 1$$

$$= \{ \int \sigma (u_4 - i u_5)\, d u\, [(u_1 - i u_2) \sqrt{-I} \pm \int \frac{\partial \sigma}{\partial v} (u_1 - i u_2)\, d u \sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma (u_1 - i u_2)\, d u\, [(u_4 - i u_5) \sqrt{-I} \pm \int \frac{\partial \sigma}{\partial v} (u_4 - i u_5)\, d u \sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$: \{ \int \sigma (u_4 - i u_5)\, d u\, [(i u_6 - u_3) \sqrt{-I} + \int \frac{\partial \sigma}{\partial v} (i u_6 - u_3)\, d u \sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma (i u_6 - u_3)\, d u\, [(u_4 - i u_5) \sqrt{-I} \pm \int \frac{\partial \sigma}{\partial v} (u_4 - i u_5)\, d u \sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

$$: \{ \int \sigma (u_1 - i u_2)\, d u\, [(i u_6 - u_3) \sqrt{-I} \pm \int \frac{\partial \sigma}{\partial v} (i u_6 - u_3)\, d u \sqrt{\Sigma u_k^2}]$$

$$- \int \sigma (i u_6 - u_3)\, d u\, [(u_1 - i u_2) \sqrt{-I} \pm \int \frac{\partial \sigma}{\partial v} (u_1 - i u_2)\, d u \sqrt{\Sigma u_k^2}]\}$$

Die beiden Formeln, die man für jede Koordinate erhält, lassen sich mittels der Relation

$$\Omega (\int \sigma u_i\, d u) \equiv \sum_1^6 (\int \sigma u_i\, d u)^2 = 0$$

in einander überführen.

Bezüglich der Ebenenkoordinaten der Brennflächen gelten die allgemeinen Bemerkungen des § 2.

Ganz analog, aber wesentlich einfacher werden die Formeln für W-Kongruenzen, in deren Laplacescher Gleichung beide Invarianten verschwinden; die Entwicklungen dieses Paragraphen gelten dann für beide Systeme von Krümmungslinien, bezw. Haupttangentenkurven der Brennflächen.

Doch wollen wir hier, wenigstens zunächst, nicht ins einzelne gehen, sondern uns mit der Untersuchung der Gleichung

$$\Omega (m) \equiv \sum_1^6 {}^i (\psi_i (v) + \int_{u_0}^{u} \sigma (u, v)\, u_i\, d u)^2 = 0$$

beschäftigen, oder vielmehr in etwas allgemeiner Weise die Gleichung

$$\sum_1^n{}^i (\psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, d\, u)^2 = C(v)$$

betrachten.

§ 5.

Die Gleichung: $\sum_1^n{}^i (\psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, d\, u)^2 = C(v)$

Differentiiert man die Gleichung

1) $$\sum_1^n{}^i m_i^2 = \sum_1^n{}^i (\psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, d\, u)^2 = C(v)$$

nach u, so ergibt sich, was auch die Funktion $C(v)$ für einen Wert haben mag:

2) $$\sum_1^n{}^i m_i \frac{\partial m_i}{\partial u} - \sigma(u, v) \sum_1^n{}^i u_i \int_{u_0}^{u} \sigma(u, v)\, u_i\, d\, u = 0$$

oder

2a) $$\sum_1^n{}^i u_i m_i = 0$$

Wir fragen, welche Gestalt die n Funktionen m_i im allgemeinsten Falle annehmen können, in dem eine Relation von der Form der Gleichung (2a) besteht.

Definieren wir n Funktionen U_i durch die $(n-1)$ Geichungen:

3)
$$\sum_1^n{}^i U_i u_i = 0$$
$$\sum_1^n{}^i U_i u_i' = 0^1)$$
$$\sum_1^n{}^i U_i u_i'' = 0^1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_1^n{}^i U_i u_i^{(n-2)} = 0$$

---

1) Die Striche (') an Funktionen von u allein sollen Differentiationen nach u bedeuten.

so können wir aus diesem Gleichungssystem durch Differentiation das Folgende ableiten:

$$4)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^n{}_i\, U_i\, u_i = 0 \\ &\sum_1^n{}_i\, U_i'\, u_i = 0\,^{1}) \\ &\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ &\sum_1^n{}_i\, U_i^{(n-2)}\, u_i = 0 \end{aligned}$$

und es ergibt sich, dass die U_i als Determinanten der Matrix der u_i und ihrer Abgeleiteten bis auf einen Faktor bestimmt sind, ebenso aber auch die u_i als Determinanten der Matrix der U_i und ihrer Abgeleiteten.

Eliminieren wir nun die homogenen Veränderlichen u_i aus den n Gleichungen (2a) und (4), so folgt:

$$5)\qquad \begin{vmatrix} m_1 & U_1 & U_1' & \dots & U_1^{(n-2)} \\ m_2 & U_2 & U_2' & \dots & U_2^{(n-2)} \\ m_3 & U_3 & U_3' & \dots & U_3^{(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \vdots \\ m_n & U_n & U_n' & \dots & U_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = 0$$

Also:

$$6)\ m_i = A_0\, U_i + A_1\, U_i' + A_2\, U_i'' + \dots A_{n-2}\, U_i^{(n-2)} \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Dabei können wir über die Funktionen $A_k\,(u, v)$ zunächst nichts aussagen. Wenn aber eine solche Relation (6) besteht für alle Werte von i, so definieren die Gleichungen (4) n Funktionen u_i bis auf einen willkürlichen Faktor, so dass die Gleichung

$$\sum_1^n{}_i\, u_i\, m_i = 0$$

erfüllt ist.

In dem vorliegenden Fall ist aber m_i das Integral einer Differentialgleichung

[1]) Die Striche (') an Funktionen von u allein sollen Differentiationen nach u bedeuten.

7) $$\frac{\partial^2 m_i}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial l\,g\,\sigma}{\partial v}\frac{\partial m_i}{\partial u} = 0$$

deren Invariante k verschwindet; d. h. die Gleichung (7), die in Bezug auf v vom 1. Range[1]) lösbar ist, muss auch in Bezug auf u von endlichem Range[1]) lösbar sein, nämlich vom Rang $(n-1)$. Hat die Differentialgleichung diese Eigenschaften, so ergibt sich ihre allgemeine Lösung ohne Quadratur; die in die Lösung eingehende willkürliche Funktion ψ_i von v verschwindet[2]) im vorliegenden Fall. Wir erhalten also zunächst das Resultat, dass für alle Werte von i folgende Gleichung bestehen muss:

8) $$m_i = \psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u,v) u_i\,du = A_0 U_i + A_1 U_i' + \ldots + A_{n-2} U_i^{(n-2)}$$

Darboux hat untersucht,[3]) wann eine Differentialgleichung von der Form (7) die hier geforderten Eigenschaften besitzt und hat die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darin gefunden, dass $\sigma(u,v)$ das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung $(n-1)$. Ordnung in u ohne 2. Glied ist.

Hat man nun eine Funktion $\sigma(u,v)$, die der genannten Bedingung genügt, etwa dadurch konstruiert, dass man $(n-1)$ beliebige Funktionen von u mit willkürlichen Konstanten additiv zusammensetzt, so bleibt noch die Frage nach solchen Systemen von Funktionen u_i oder U_i offen, dass die Gleichung

$$\sum_1^n{}_i\, u_i \int \sigma\, u_i\,du = 0$$

auch wirklich erfüllt ist; dabei ist ohnehin schon vorausgesetzt, dass die Differentialgleichung, der σ genügt, die allgemeinste ihrer Art ist.

[1]) Die Bezeichnung Rang (rang) findet sich bei Darboux: leçons 2. Band, 2. Kap., pag. 36.

[2]) Zusammen mit dem Wert des Integrals an der unteren Grenze:

$$\psi_i(v) + [\int \sigma\, u_i\,du]_{u=u_0} = 0$$

[3]) leçons 2. Band, 2. Kap., pag. 39—45.

Wir differentiieren die Gleichung (8) nach u:

$$9)\quad \frac{\partial A_0}{\partial u} U_i + \left(A_0 + \frac{\partial A_1}{\partial u}\right) U_i' + \ldots \left(A_{n-3} + \frac{\partial A_{n-2}}{\partial u}\right) U_i^{(n-2)} + A_{n-2} U_i^{(n-1)} = \sigma \cdot u_i$$

Dann ergeben sich mit Benützung des Gleichungssystems (4) die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial A_0}{\partial u} \sum_1^n {}_i U_i^2 + \left(A_0 + \frac{\partial A_1}{\partial u}\right) \Sigma U_i U_i' + \ldots + A_{n-2} \Sigma U_i U_i^{(n-1)} = 0$$

$$10)\quad \frac{\partial A_0}{\partial u} \Sigma U_i' U_i + \left(A_0 + \frac{\partial A_1}{\partial u}\right) \Sigma U_i'^2 + \ldots + A_{n-2} \Sigma U_i' U_i^{(n-1)} = 0$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial u} \Sigma U_i^{(n-2)} U_i + \left(A_0 + \frac{\partial A_1}{\partial u}\right) \Sigma U_i^{(n-2)} U_i' + \ldots + A_{n-2} \Sigma U_i^{(n-2)} U_i^{(n-1)} = 0$$

Bezeichnet man nun die Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \sum_1^n {}_i U_i^2 & \Sigma U_i U_i' & \ldots \Sigma U_i U_i^{(n-2)} & \Sigma U_i U_i^{(n-1)} \\ \Sigma U_i' U_i & \Sigma U_i'^2 & \ldots \Sigma U_i' U_i^{(n-2)} & \Sigma U_i' U_i^{(n-1)} \\ \Sigma U_i^{(n-2)} U_i & \Sigma U_i^{(n-2)} U_i' & \ldots \Sigma (U_i^{(n-2)})^2 & \Sigma U_i^{(n-2)} U_i^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

mit $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u) \ldots \varphi_{n-1}(u)$, und mit $\alpha(u, v)$ eine noch unbekannte Funktion, so folgt aus (10):

$$11)\quad \begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial u} &= \alpha \cdot \varphi_0 \\ A_0 + \frac{\partial A_1}{\partial u} &= \alpha \cdot \varphi_1 \\ &\cdots \\ A_{n-3} + \frac{\partial A_{n-2}}{\partial u} &= \alpha \cdot \varphi_{n-2} \\ A_{n-2} &= \alpha \cdot \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen n Gleichungen die $(n-1)$ Grössen A_i, so ergibt sich für α die folgende allgemeine lineare Differentialgleichung $(n-1)$. Ordnung ohne 2. Glied, wenn man die Grössen $\varphi_i(u)$ als bekannt betrachtet:

$$12) \quad \alpha\varphi_0 - \frac{\partial}{\partial u}(\alpha\varphi_1) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\alpha\varphi_2) \ldots + (-1)^{n-2}\frac{\partial^{n-2}}{\partial u^{n-2}}(\alpha\varphi_{n-2}) + (-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}}(\alpha\varphi_{n-1}) = 0$$

Gibt man sich die Funktionen u_i, so sind auch die U_i und mithin die Koeffizienten φ_i dieser Gleichung bekannt. Gelingt es, α aus ihr zu berechnen, so ergibt das System (11) die Funktionen A_i und hierauf (8) die Grössen m_i, die wir suchen, ohne Quadratur.

Wie man sieht, wird die Gleichung (12) bereits für $n=3$ von der 2. Ordnung und also wegen ihres allgemeinen Charakters im allgemeinen nicht lösbar sein. Wir haben aber ausser der Gleichung

$$\sum_1^n{}^i u_i \int \sigma\, u_i\, d\, u = 0$$

auch noch die Gleichung

$$\sum_1^n{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\, u\right)^2 = C(v)$$

wo $C(v)$ eine beliebige, aber vorgegebene Grösse ist, z. B. 0, zu berücksichtigen; und diese Bedingung, die das Problem im allgemeinen noch kompliziert, führt im Falle $n=3$ zur Lösung.

Nachdem wir bisher verschiedene Eigenschaften der Funktionen $\sigma(u,v)$ und $m_i = \psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma\, u_i\, d\, u$ kennen gelernt haben, fassen wir die Aufgabe, σ und m_i bei vorgegebenen Grössen u_i zu bestimmen, von einer anderen Seite an. Schreiben wir wieder zur Abkürzung

$$\psi_i(v) + \int_{u_0}^{u} \sigma(u,v)\, u_i\, d\, u = \int \sigma\, u_i\, d\, u$$

so ergibt sich durch $(n+1)$ maliges Differentiieren der Bedingungsgleichung, zusammen mit ihr, folgendes System von $(n+2)$ Gleichungen:

$$\sum_1^n{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\,u\right)^2 = C\,(v)$$

$$\Sigma\, u_i \int \sigma\, u_i\, d\,u = 0$$

$$\Sigma\, u_i' \int \sigma\, u_i\, d\,u + \sigma\, \Sigma\, u_i^2 = 0$$

13)

$$\Sigma\, u_i'' \int \sigma\, u_i\, d\,u + \frac{\partial}{\partial u}(\sigma\, \Sigma\, u_i^2) + \sigma\, \Sigma\, u_i\, u_i' = 0$$

— — — — — — — — — —

$$\Sigma\, u_i^{(n)} \int \sigma\, u_i\, d\,u + \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}}(\sigma\, \Sigma\, u_i^2) + \ldots + \frac{\partial}{\partial u}(\sigma\, \Sigma\, u_i\, u_i^{(n-2)}) + \sigma\, \Sigma\, u_i\, u_i^{(n-1)} = 0$$

und hiefür schreiben wir kürzer:

$$\sum_1^n{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\,u\right)^2 = C\,(v)$$

$$\Sigma\, u_i \int \sigma\, u_i\, d\,u = 0$$

14)

$$\Sigma\, u_i' \int \sigma\, u_i\, d\,u + \alpha_0 = 0$$

$$\Sigma\, u_i'' \int \sigma\, u_i\, d\,u + \alpha_1 = 0$$

— — — — — —

$$\Sigma\, u_i^{(n)} \int \sigma\, u_i\, d\,u + \alpha_{n-1} = 0$$

Dabei sind die α_ν lineare Ausdrücke in σ und seinen ν ersten Abgeleiteten nach u.

Eliminiert man nun aus den $(n+1)$ letzten Gleichungen die Integrale, so erhält man die der Gleichung

$$\sum_1^n{}^i u_i \int \sigma\, u_i\, d\,u = 0$$

entsprechende Differentialgleichung für $\sigma\,(u, v)$:

$$15) \qquad A) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & \dots & u_n' & \alpha_0 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & \dots & u_n'' & \alpha_1 \\ — & — & — & — & — & \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & u_3^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} & \alpha_{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung ist, wie wir bereits wissen, in σ linear von der $(n-1)$. Ordnung und zwar eine allgemeine Gleichung dieser Art; ihr allgemeinstes Integral sei:

$$16) \qquad \sigma = \sum_1^{n-1 k} C_k(v)\, \sigma_k(u)$$

Damit jedoch die Gleichung (15) nicht identisch erfüllt sei, darf zwischen den Grössen u_i keine lineare Relation bestehen; auf diesen Fall kommen wir später zurück.

Integrieren wir nun die für jeden Wert von k zwischen 0 und $(n-1)$ geltende Gleichung:

$$\sum_1^{n i} \sigma_k u_i \int \sigma_k u_i \, d u = 0$$

so folgt:

$$\sum_1^{n i} \left(\int \sigma_k u_i \, d u\right)^2 = \gamma_{kk}(v)$$

und dass auch

$$\sum_1^{n i} \int \sigma_k u_i \, d u \cdot \int \sigma_\lambda u_i \, d u = \gamma_{k\lambda}(v)$$

ist, erkennt man durch Differentiieren dieses Ausdrucks. Dabei sind die γ_{kk} und $\gamma_{k\lambda}$ von v allein abhängige Grössen, die in jedem Falle bestimmt werden müssen.

Setzen wir nun den durch (16) gegebenen Wert von σ in die Gleichung (1):

$$\sum_1^{n i} \left(\int \sigma u_i \, d u\right)^2 = C(v)$$

ein, so folgt:

17) $$\sum_{1}^{n-1}{}^{k} \sum_{1}^{n-1}{}^{\lambda} C_k(v)\, C_\lambda(v)\, \gamma_{k\lambda}(v) = C(v)$$ [1])

An diese quadratische Relation sind also die arbiträren Funktionen $C_k(v)$ gebunden, wenn σ auch der Gleichung (1) genügen soll.

Etwas ganz ähnliches gilt, wenn man eine von den Gleichungen

$$\Sigma\, u_i^{(\nu+1)} \int \sigma\, u_i\, d\, u + a_\nu = 0$$

integrieren kann und zur Gleichung

$$\Sigma\, u_i^{(\nu)} \int \sigma\, u_i\, d\, u + a_{\nu-1} = 0$$

übergehen will; dann wird aber die Konstantenrelation linear.

Im vorigen wurde die Auflösung der Gleichung (1) nach σ zurückgeführt auf die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-1)$. Ordnung und die Auflösung einer quadratischen Gleichung. Statt dessen kann man auch einen direkteren Weg einschlagen. Lassen wir aus dem Gleichungssystem (14) die erste und letzte Gleichung weg, so können wir die Ausdrücke $\int \sigma\, u_i\, d\, u$ durch die u_i und ihre $(n-1)$ ersten Ableitungen ausdrücken. Es sei

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & u_3' & \dots & u_n' \\ — & — & — & — & — & — \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & u_3^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \Delta$$

Dann ergibt sich für $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\} n$:

18) $$m_i = \int \sigma\, u_i\, d\, u = \frac{\left\{\begin{matrix}-1\\ (-1)^{i+1}\end{matrix}\right\}}{\Delta} \begin{vmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+n-1} & 0 \\ u_{i+1}' & u_{i+2}' & \dots & u_{i+n-1}' & a_0 \\ — & — & — & — & — & — \\ u_{i+1}^{(n-1)} & u_{i+2}^{(n-1)} & \dots & u_{i+n-1}^{(n-1)} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

[1]) Diese Relation ist von der Wahl der partikulären Integrale σ_k abhängig, kann also auch im allgemeinsten Fall zufällig von spezieller Art sein.

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (1) ein, so folgt in beiden Fällen mittels bekannter Sätze über Matricen die folgende Gleichung:

19)

$$\text{B)}\quad C(v) = \frac{1}{A^2}\cdot \begin{vmatrix} \sum_1^n u_i^2 & \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i u_i'' & \dots & \Sigma u_i u_i^{(n-1)} & 0 \\ \Sigma u_i' u_i & \Sigma u_i'^2 & \Sigma u_i' u_i'' & \dots & \Sigma u_i' u_i^{(n-1)} & \alpha_0 \\ — & — & — & — & — & — \\ \Sigma u_i^{(n-1)} u_i & \Sigma u_i^{(n-1)} u_i' & \Sigma u_i^{(n-1)} u_i'' & \dots & \Sigma (u_i^{(n-1)})^2 & \alpha_{n-2} \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

σ ist also das allgemeinste Integral einer Differentialgleichung $(n-2)$. Ordnung, 2. Grades, die nur quadratische Glieder enthält, ausserdem eine Konstante.

Es wäre leicht zu zeigen, dass die Kenntnis eines partikulären Integrals hinreichend ist, um mit Hilfe der Gleichung A, deren Ordnung hiedurch um 1 erniedrigt wird, auch die Ordnung der Gleichung B um eine Einheit zu erniedrigen.

Ist man nun auf irgend eine Weise zur Kenntnis der Funktion $\sigma(u, v)$ gelangt, so ergeben die Gleichungen (18) die Ausdrücke $\int \sigma u_i du$ ohne jede Quadratur. Sie erscheinen in der Form $(n-1)$ gliedriger Summen, deren Summanden von arbiträren Funktionen $C_k(v)$ multiplizierte Funktionen von u sind. Die Funktionen $\psi_i(v)$ hingegen, die ursprünglich auftraten, ergaben sich als Null.

§ 6.

(Fortsetzung.)

Wir gehen nun dazu über, die einfachsten Gleichungen von der betrachteten Form

$$\sum_1^n{}^i \left(\int \sigma(u, v)\, u_i\, du\right)^2 = C(v)$$

bei vorgegebenen Funktionen u_i wirklich aufzulösen.

I. Fall: $n = 2$.

Wir leiten aus der Gleichung:

1) $$(\int \sigma u_1 \, du)^2 + (\int \sigma u_2 \, du)^2 = C(v)$$

durch differentiieren die folgenden ab:

2) $$u_1 \int \sigma u_1 \, du + u_2 \int \sigma u_2 \, du = 0$$

3) $$u_1' \int \sigma u_1 \, du + u_2' \int \sigma u_2 \, du + \sigma (u_1^2 + u_2^2) = 0$$

woraus sich

4) $$\int \sigma u_1 \, du : \int \sigma u_2 \, du : 1$$
$$= \sigma \cdot u_2 (u_1^2 + u_2^2) : -\sigma \cdot u_1 (u_1^2 + u_2^2) : (u_1 u_2' - u_2 u_1')$$

ergibt.

Ohne auf die Gleichung (A) einzugehen, berechnen wir σ gleich aus der hier von Differentialquotienten von σ freien Gleichung (B):

B) $$\sigma = \pm \frac{\sqrt{C(v)}\,(u_1 u_2' - u_2 u_1')}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}}$$

Dann ergibt (4):

5) $$\int \sigma u_1 \, du = \pm \frac{u_2 \sqrt{C(v)}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$
$$\int \sigma u_2 \, du = \mp \frac{u_1 \sqrt{C(v)}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

Die zugehörige Laplacesche Differentialgleichung würde lauten:

6) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial \, lg \sqrt{C}}{\partial v} \frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0$$

Wie man sieht, verschwinden ihre beiden Invarianten.

II. Fall: $n = 3$.

Ausgehend von

1) $$(\int \sigma u_1 \, d u)^2 + (\int \sigma u_2 \, d u)^2 + (\int \sigma u_3 \, d u)^2 = C(v)$$

leiten wir die Gleichungen:

2) $$u_1 \int \sigma u_1 \, d u + u_2 \int \sigma u_2 \, d u + u_3 \int \sigma u_3 \, d u = 0$$

3) $$u_1' \int \sigma u_1 \, d u + u_2' \int \sigma u_2 \, d u + u_3' \int \sigma u_3 \, d u + \sigma \sum_1^3 i u_i^2 = 0$$

4) $$u_1'' \int \sigma u_1 \, d u + u_2'' \int \sigma u_2 \, d u + u_3'' \int \sigma u_3 \, d u + \frac{\partial}{\partial u}(\sigma \sum_1^3 i u_i^2) + \sigma \sum_1^3 i u_i u_i' = 0$$

5) $$u_1''' \int \sigma u_1 \, d u + u_2''' \int \sigma u_2 \, d u + u_3''' \int \sigma u_3 \, d u + \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\sigma \sum_1^3 i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial u}(\sigma \sum_1^3 i u_i u_i') + \sigma \sum_1^3 i u_i u_i'' = 0$$

ab.

Durch Elimination der Integrale aus den Gleichungen (2)—(5) ergibt sich die Gleichung

A) $$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & \sigma \Sigma u_i^2 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & \frac{\partial}{\partial u}(\sigma \Sigma u_i^2) + \sigma \Sigma u_i u_i' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & \frac{\partial^2}{\partial u^2}(\sigma \Sigma u_i^2) + \frac{\partial}{\partial u}(\sigma \Sigma u_i u_i') + \sigma \Sigma u_i u_i'' \end{vmatrix} = 0$$

während man durch Einsetzen der aus (2), (3), (4) berechneten Integrale:

$$\int \sigma u_1 \, d u : \int \sigma u_2 \, d u : \int \sigma u_3 \, d u : 1$$

6) $$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & 0 \\ u_2' & u_3' & \alpha_0 \\ u_2'' & u_3'' & \alpha_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_3 & u_1 & 0 \\ u_3' & u_1' & \alpha_0 \\ u_3'' & u_1'' & \alpha_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ u_1' & u_2' & \alpha_0 \\ u_1'' & u_2'' & \alpha_1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}$$

in (1) die Gleichung (B) erhält. Setzt man

$$\begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ u_1' u_2' u_3' \\ u_1'' u_2'' u_3'' \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} \sum_1^3 i\, u_i^2 & \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i u_i'' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 & \Sigma u_i' u_i'' \\ \Sigma u_i u_i'' & \Sigma u_i' u_i'' & \Sigma u_i''^2 \end{vmatrix} = \Delta^2$$

so folgt:

$$\text{B)} \qquad \begin{vmatrix} \sum_1^3 i\, u_i^2 & \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i u_i'' & 0 \\ \Sigma u_i' u_i & \Sigma u_i'^2 & \Sigma u_i' u_i'' & \alpha_0 \\ \Sigma u_i'' u_i & \Sigma u_i'' u_i' & \Sigma u_i''^2 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta^2 \cdot C(v)$$

Da jedes Integral dieser Gleichung ohne Rücksicht auf den Wert von $C(v)$ ein Integral der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung (A) ist, behandeln wir, um (A) lösen zu können, die einfachere Gleichung:

$$\text{Ba)} \qquad \begin{vmatrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i u_i'' & 0 \\ \Sigma u_i' u_i & \Sigma u_i'^2 & \Sigma u_i' u_i'' & \alpha_0 \\ \Sigma u_i'' u_i & \Sigma u_i'' u_i' & \Sigma u_i''^2 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung nach $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ auf, so folgt

$$7) \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\partial\, l\, y}{\partial\, u} \sqrt{\begin{vmatrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{vmatrix}} \pm \frac{1 \cdot \sqrt{-\Sigma u_i^2}}{\begin{vmatrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i' u_i \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{vmatrix}}$$

Setzen wir anderseits für α_0 und α_1 ihre Werte aus (3) und (4) ein, so folgt

$$8) \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(\sigma \Sigma u_i^2) + \sigma \Sigma u_i u_i'}{\sigma \Sigma u_i^2} = \frac{\partial\, l\, y}{\partial\, u} [\sigma (\Sigma u_i^2)^{\frac{1}{2}}]$$

Vergleicht man die beiden Gleichungen (7) und (8), so erhält man für jeden Wert des Vorzeichens in (7) eine lineare Differentialgleichung für σ, in deren Integral eine willkürliche Konstante (Funktion von v) multiplikativ eingeht; setzt man diese Konstanten $= 1$, so erhält man die folgenden beiden Integrale σ_1 und σ_2, die linear unabhängig sind und deren lineare Kombination also das allgemeine Integral

9) $$\sigma = C_1(v)\,\sigma_1 + C_2(v)\,\sigma_2$$

von (A) ergibt:

10) $$\sigma_{1,2} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{vmatrix}}}{(\Sigma u_i^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{+ i \int_{v_0}^{v} \frac{\Delta \sqrt{\Sigma u_i^2}\, du}{\begin{vmatrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{vmatrix}}}$$

Nachdem wir nun das vollständige Integral der Gleichung (A) gefunden haben, haben wir noch die quadratische Gleichung aufzusuchen, der die Grössen $C_1(v)$ und $C_2(v)$ in dem Integral

$$\sigma = C_1(v)\,\sigma_1 + C_2(v)\,\sigma_2$$

genügen müssen, damit σ auch der Gleichung (B) genügt. Wie σ, so sind auch a_0 und a_1 zweigliedrige Summen; wir setzen

$$a_0 = C_1(v)\,a_{10} + C_2(v)\,a_{20}$$
$$a_1 = C_1(v)\,a_{11} + C_2(v)\,a_{21}$$

und führen diese Ausdrücke in die Gleichung (B) ein. Es folgt

11) $$C_1^2 \begin{vmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0\ a_{10}\ a_{11}\ 0 & a_{10} \\ & a_{11} \end{vmatrix} + 2\,C_1 C_2 \begin{vmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0\ a_{10}\ a_{11}\ 0 & a_{20} \\ & a_{21} \end{vmatrix} + C_2^2 \begin{vmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0\ a_{20}\ a_{21}\ 0 & a_{20} \\ & a_{21} \end{vmatrix} = C_{(v)}\,\Delta^2$$

Die Koeffizienten von C_1^2 und C_2^2 verschwinden infolge der Gleichung (Ba); setzt man dann in dem Koeffizient von $2\,C_1 C_2$

für die a_{kl} ihre Werte ein, so fallen die Exponentialfunktionen weg und es ergibt sich

12) $$4\, C_1(v)\, C_2(v) = C(v)$$

in einfacher Weise als die gesuchte quadratische Relation zwischen C_1 und C_2.

Dann wird, wenn man

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\Delta \sqrt{\Sigma u_i^2}\, du}{\begin{vmatrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{vmatrix}} = M$$

setzt, die allgemeinste Lösung σ der Gleichung (B) und somit der Gleichung (1)

13) $$\sigma = \frac{|\Sigma u_i^2 \quad \Sigma u_i u_i'|^{\frac{1}{2}}}{\Sigma u_i u_i' \Sigma u_i'^2 \over (\Sigma u_i^2)^{\frac{3}{2}}} \left[C_1(v)\, e^{iM} + \frac{C(v)}{4\, C_1(v)}\, e^{-iM} \right]$$

Die zugehörige Laplacesche Gleichung wird:

14) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} - \frac{\dfrac{\partial C_1(v)}{\partial v}\, e^{iM} + \dfrac{\partial \dfrac{C(v)}{4\, C_1(v)}}{\partial v}\, e^{-iM}}{C_1(v)\, e^{iM} + \dfrac{C(v)}{4\, C_1(v)}\, e^{-iM}} \frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0$$

Sie ist die allgemeinste von der Form

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0$$

die 3 partikuläre Integrale mit einer willkürlichen Funktion von u zulässt, deren Quadratsumme nur von v abhängt und deren willkürliche Funktionen von u (u_i) vorgegeben sind. Oder da $i\sqrt{C(v)}$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung (14) ist, lässt sie 4 partikuläre Integrale zu, deren Quadratsumme $= 0$ ist, mit vorgegebenen willkürlichen Funktionen von u, von denen eine $= 0$ ist.

Will man nun die Werte der m_i wirklich angeben, so folgt aus (6)

15) $$m_i = \frac{1}{\Delta}\left[\alpha_0 \begin{vmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} \\ u_{i+1}^{*} & u_{i+2}^{*} \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} u_{i+1} & u_{i+2} \\ u_{i+1}' & u_{i+2}' \end{vmatrix}\right]$$

Die Werte von α_0 und α_1 sind durch σ bestimmt:

$$\alpha_0 = \sigma \Sigma u_i^2 \text{ und } \alpha_1 = \frac{\partial}{\partial u}(\sigma \Sigma u_i^2) + \sigma \Sigma u_i u_i'$$

Damit haben wir die allgemeinsten 3 Funktionen m_i gefunden, deren Differentialquotienten nach u zu 3 gegebenen Funktionen u_i proportional sind und deren Quadratsumme $= C(v)$ ist. Die Lösung ist von einer willkürlichen Funktion $C_1(v)$ abhängig.

Schon zur Erledigung des nächsten Falles, $n = 4$, ist die Kenntnis eines partikulären Integrales α_0 der Gleichungen (A) oder (B) notwendig; dadurch reduzieren sich aber diese Gleichungen auf die hier behandelten.

§ 7.

Lineare Transformationen der Kugelkongruenzen, deren Brennflächen sphärische Krümmungslinien haben, und der entsprechenden Strahlensysteme.

Bevor wir dazu übergehen, die Entwicklungen des vorigen Paragraphen für die Theorie der W-Kongruenzen zu verwerten, haben wir noch zu untersuchen, welchen Einfluss eine lineare Relation zwischen den u_i ausübt.

Es seien die $m_i = \int \sigma u_i \, du$ wie bisher 6 Koordinaten, die der Gleichung

1) $$\Omega(m) = \sum_1^6{}^i (\int \sigma u_i \, du)^2 = 0$$

genügen. Wir setzen

2) $$m_i' = \sum_1^6{}^k \alpha_{ik} m_k$$

und bestimmen die 36 Konstanten a_{ik} so, dass

$$3) \qquad \Omega(m') = \varrho \cdot \Omega(m)$$

wird, d. h. wir transformieren die quadratische Form $\Omega(m)$ in sich.[1]) Fasst man dann die m_i als Koordinaten einer Kugel oder Geraden auf, so gilt dasselbe von den m_i'.

Nun ergibt die Gleichung (2)

$$4) \qquad m_i' = \sum_1^6{}_k a_{ik} \int \sigma u_k \, du = \int \sigma \sum_1^6{}_k a_{ik} u_k \, du$$

Setzt man

$$5) \qquad u_i' = \sum_1^6{}_k a_{ik} u_k$$

so folgt aus der Gleichung $\Omega(m') = 0$ durch Differentiieren:

$$6) \qquad \sum_1^6{}_i u_i' m_i' = 0$$

Wir erhalten also den Satz: Uebt man auf eine W-Kongruenz, deren Kugeln oder Gerade $u = \text{const}$ einem linearen Komplex angehören, eine lineare Transformation aus, so gilt dasselbe von der transformierten Kongruenz: dabei werden die Koordinaten des Komplexes mittels derselben Formeln (5, 2) transformiert, wie die Koordinaten der ihm angehörenden Geraden oder Kugeln: es gilt also auch für die von 0 verschiedene Form $\sum_1^6{}_i u_i^2$:

$$7) \qquad \Omega(u') = \varrho \cdot \Omega(u)$$

Hat man nun eine oder mehrere lineare Relationen zwischen den u_i, so gehen diese nach (5) wieder in lineare Relationen über und man hat die hinreichende Anzahl von Konstanten zur Verfügung, um jede derartige Relation auf eine der beiden folgende Formen zu bringen:[2])

[1]) Man vergl. die Cayleyschen Formeln; allgemeiner Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie II. Band.

[2]) Darboux, leçons IV, pag. 260.

8) $$\begin{cases} u_k = 0 \\ \text{oder } u_h + i\,u_k = 0 \end{cases}$$

Im 1. Fall ist dann

$$m_k = \int \sigma\, u_k\, d\,u = \gamma\,(v),$$

im 2.

$$m_h + i\,m_k = \int \sigma\, u_h\, d\,u + i \int \sigma\, u_k\, d\,u = \gamma\,(v)$$

$$\int \sigma\, u_h\, d\,u = \gamma\,(v) - i \int \sigma\, u_k\, d\,u$$

Die Gleichung

$$\sum_1^n{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\,u\right)^2 = C\,(v)$$

vereinfacht sich dann im 1. Fall in

9) $$\sum_1^{n-1}{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\,u\right)^2 = C\,(v) - \gamma^2\,(v) = C_1\,(v)$$

im 2. in

10) $$\sum_1^{n-2}{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\,u\right)^2 - 2\,i\,\gamma\,(v) \int \sigma\, u_n\, d\,u = C\,(v) - \gamma^2\,(v)$$

Aus (10) erhält man aber durch 2maliges Differentiieren die folgende Gleichung

11) $$\sum_1^{n-2}{}^i \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{u_i}{u_n} \int (\sigma \cdot u_n)\left(\frac{u_i}{u_n}\right) d\,u\right] = 0$$

Da sich diese Gleichung aber auch durch 2maliges Differentiieren von

12) $$\sum_1^{n-2}{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\,u\right)^2 = 0$$

ergibt, braucht man nur σ aus (12) zu bestimmen, um nach fundamentalen Sätzen über die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung auch (11) vollständig lösen zu können.

Wenn also zwischen den u_i lineare Relationen bestehen, so erniedrigt sich die Anzahl der Glieder der Gleichung

$$\sum_1^n{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\, u\right)^2 = C\,(v)$$

wenn man die Relationen auf ihre Normalformen reduziert.

Wenn wir uns nun auf 6 Grössen m_i beschränken und diese als Koordinaten von Geraden auffassen, so gibt uns die Transformation der quadratischen Form $\Omega\,(m)$ in sich alle linearen und linear dualistischen Transformationen des Raumes.[1]) Diese beide Arten von Transformationen voneinander zu trennen ist aber nicht möglich, wenn man die Gerade als Raumelement nimmt. (cf. § 9.)

Die entsprechenden Transformationen des Kugelraumes setzen sich zusammen aus den konformen Transformationen des Raumes, d. h. aus Translationen, Rotationen, Aehnlichkeitstransformationen und Transformationen mittels reciproker Radien, bei denen allen der ausgezeichnete Komplex in sich transformiert wird und aus den Dilatationen, die eine Fläche in eine Parallelfläche überführen;[1]) sie sind leicht analytisch zu formulieren.

§ 8.

Geometrische Anwendungen.

Wie Darboux für Flächen mit 2 Systemen sphärischer Krümmungslinien nachweist,[2]) bestehen zwischen den Koordinaten der Grundkugeln eines jeden der beiden Systeme lineare Relationen in gleicher oder verschiedener Anzahl, deren Summe aber stets $= 6$ ist. Sodann kann Darboux die Parameter-Darstellung der homogenen Kugelkoordinaten in einfacher Weise angeben und durch Differentiationsprozesse die zugehörigen Grundkugelsysteme finden.

Wir kehren nun das von Darboux gelöste Problem um: Erstens klassifizieren wir überhaupt die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien $u = \text{const}$ nach der An-

[1]) Lie, über Komplexe, Annalen V.

[2]) leçons IV, pag. 256—266.

zahl und Art der zwischen den Koordinaten der Grundkugeln bestehenden Relationen. Zweitens geben wir uns von vornherein die Koordinaten der Grundkugeln und suchen alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien $u = \text{const}$, die jede der gegebenen Kugeln unter dem gegebenen Winkel schneiden.

Die gegebenen Relationen führen wir auf die Normalform zurück und denken uns diese Reduktion im folgenden immer schon ausgeführt. Die hiezu notwendige Transformation kann, wenn die zu dem reduzierten Grundkugelsystem gehörigen Flächen gefunden sind, wieder rückgängig gemacht werden.

I. 4 Relationen: $u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$

1)
$$\begin{aligned} m_1 &= \int \sigma\, u_1\, d\,u \\ m_2 &= \int \sigma\, u_2\, d\,u \\ m_k &= \psi_k(v) \quad (k = 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

Dann haben wir die Gleichung

2)
$$(\int \sigma\, u_1\, d\,u)^2 + (\int \sigma\, u_2\, d\,u)^2 = -\sum_3^6{}_k\, \psi_k^2(v)$$

aufzulösen, aus der sich nach pag. 40 ergibt:

3)
$$\begin{aligned} \int \sigma\, u_1\, d\,u &= +\sqrt{-\sum_3^6{}_k\, \psi_k^2(v)} \cdot \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ \int \sigma\, u_2\, d\,u &= \mp\sqrt{-\sum_3^6{}_k\, \psi_k^2(v)}\, \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \end{aligned}$$

Da wir die m_i nur bis auf einen Faktor zu bestimmen brauchen, können wir schreiben:

3a)
$$m_1 = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \qquad m_2 = \frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \qquad m_k = \frac{\pm \psi_k(v)}{\sqrt{-\sum_3^6{}_l\, \psi_l^2(v)}} \quad (k = 3, 4, 5, 6)$$

Wie man sieht, ist auch das 2. System von Krümmungslinien sphärisch; die längs einer Krümmungslinie $v = \text{const}$ berührenden Kugeln gehören dem System

$$4) \qquad \sum_3^6{}_k \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi_k}{\sqrt{-\sum_3^6{}_l \psi_l^2}}\right) m_k = 0$$

von linearen Komplexen an.

Die hier definierten Kongruenzen sind sehr einfach; ihre beiden Brennflächen sind Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse. Vertauscht man die obigen Relationen, indem man etwa

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_6 = 0\ ^1)$$

setzt, so erhält man die allgemeinsten Kegelflächen: oder wenn man

$$u_1 = u_2 = \left\{\begin{matrix} u_4 \\ u_5 \end{matrix}\right\} = u_6 = 0$$

setzt, so erhält man die Orthogonalflächen eines Kugelbüschels mit reellem oder imaginärem Schnittkreis.

Jedoch erhält man durch Transformation der Form $\Omega(m) = 0$ in sich eine allgemeinere Familie von Flächen, nämlich, wie leicht einzusehen ist, die Röhrenflächen mit kreisförmigen Krümmungslinien v, deren erzeugende Kugeln 2 feste Kugeln (die sich auf Punkte reduzieren können), berühren und deren Krümmungslinien u auf Kugeln liegen, die eine reelle oder imaginäre Dupinsche Cyklide umhüllen. Der Schnittwinkel dieser Kugeln mit der Fläche bestimmt sich aus einer linearen Relation zwischen den u_i.

Geht man zur Liniengeometrie über, so erhält man W-Strahlensysteme, deren beide Brennflächen Regelflächen sind, die ausser ihren Erzeugenden noch 2 Gerade enthalten.[2])

[1]) Diese Transformation bedeutet in der Liniengeometrie nur eine Drehung des Koordinatensystems.

[2]) Man erhält also, wenn man auch das hinsichtlich des Komplexes $r_6 = 0$ konjugierte Strahlensystem in Betracht zieht, 4 Regelflächen als Brennflächen mit je 2 Geraden, die nicht zu den Erzeugenden gehören.

Schneiden sich die beiden in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugierten Brennflächensysteme in einer dieser Geraden einer Brennfläche, so schneiden sie sich auch in einer Geraden der 2. Brennfläche; denn die entsprechende Röhrenfläche hat dann einen Knotenpunkt.

Alle diese Flächen leiten sich durch Transformation der Form $\Omega(m) = 0$, d. h. durch lineare und linear dualistische Umformungen, aus den allgemeinsten Konoiden ab.

II. 3 Relationen: $u_4 = u_5 = u_6 = 0$

5)
$$m_i = \int \sigma\, u_i\, d\, u \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$m_k = \psi_k(v) \qquad (k = 4, 5, 6)$$

Die aufzulösende Gleichung ist

6)
$$\sum_1^3{}^i \left(\int \sigma\, u_i\, d\, u\right)^2 = -\sum_4^6{}^k \psi_k^2(v)$$

Wir können das pag. 45 erhaltene Resultat nicht in voller Allgemeinheit brauchen, sondern der Umstand, dass $\sum_4^6{}^k \psi_k^2(v)$ in 3 Quadrate von Funktionen zerfällt, die mit den $\int \sigma\, u_i\, d\, u$ gleichberechtigt sind, bringt eine Bedingung für die eingehende arbiträre Funktion $C_1(v)$ mit sich. Denn da es möglich ist, auf ∞ viele Weise 3 Funktionen $f_k(v)$ bis auf einen Faktor zu bestimmen, so dass

$$\sum_4^6{}^k f_k(v)\, m_k = 0$$

ist, also auch, wenn man $f_1(v) = f_2(v) = f_3(v) = 0$ setzt:

$$\sum_1^6{}^k f_k(v)\, m_k = 0,$$

gehören die Kugeln der Kongruenz längs einer Krümmungslinie $v = \text{const}$ einer Schar von linearen Komplexen an. Auf der von ihnen gebildeten Röhrenfläche sind also sämtliche Krümmungslinien sphärisch und da sich 2 aufeinanderfolgende

Röhrenflächen v und $v + dv$ in einer gemeinsamen Krümmungslinie schneiden, die zugleich eine Krümmungslinie $v = \text{const}$ der Enveloppe ist, sind auch auf unserer Fläche sämtliche Krümmungslinien sphärisch. Also müssen sich die m_i in die Form

7a) $$m_i = \Phi_i(u) + \Psi_i(v)\ ^1)$$

bringen lassen und unser früheres Resultat, wonach sich die m_i in der Form

7b) $$m_i = C_1(v) \int_{u_0}^{u} \sigma_1 u_i \, du + \frac{-\sum_4^6 k \, \psi_k(v)^2}{4\, C_1(v)} \int_{u_0}^{u} \sigma_2 u_i \, du$$

darstellen, muss hiemit bis auf einen Faktor übereinstimmen. Da wir aber wissen, dass

$$m_k = \psi_k(v) \quad (k = 4, 5, 6)$$

ist, kann dieser Faktor nur eine Funktion von v sein, d. h. $C_1(v)$ und $C_2(v)$ dürfen sich nur um einen Faktor γ^2 unterscheiden, der eine absolute Konstante ist.

$$\frac{C_1}{C_2} = \gamma^2$$

Es ist aber

$$C_2 = \frac{-\sum_4^6 k \, \psi_k'^2(v)}{4\, C_1}$$

Also ist

$$C_1(v) = \sqrt{-\sum_4^6 k \, \psi_k'^2} \cdot \frac{\gamma}{2}$$

$$C_2(v) = \sqrt{-\sum_1^6 k \, \psi_k'^2} \cdot \frac{1}{2\gamma}$$

Dividiert man die 6 Grössen m_i durch $\sqrt{-\sum_4^6 k \, \psi_k'^2}$, so ist

[1]) Dabei können die Funktionen $\Phi_i(u)$ und $\Psi_i(v)$ zum Teil $= 0$ sein.

$$m_l = \frac{\psi_l}{\sqrt{-\sum_4^6{}_k \psi_k^2}} \qquad (l = 4, 5, 6)$$

ferner nach (13) pag. 44

8)
$$\sigma = \frac{\left| \begin{matrix} \sum_1^3{}_i u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i' u_i & \Sigma u_i'^2 \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{2 (\Sigma u_i^2)^{\frac{3}{2}}} [\gamma e^{iM} + \frac{1}{\gamma} e^{-iM}]$$

Da aber M der Form nach ein Integral ist, braucht man nur die untere Grenze zu verschieben, um γ in M aufzunehmen. Wir können also auch schreiben:

$$\sigma = \frac{\left| \begin{matrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{(\Sigma u_i^2)^{\frac{3}{2}}} \cos M$$

9)
$$= \frac{\left| \begin{matrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{(\Sigma u_i^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \int_{u_0}^{u} \frac{\Delta (\Sigma u_i^2)^{\frac{1}{2}} du}{\left| \begin{matrix} \Sigma u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{matrix} \right|}$$

Die Grössen m_k ergibt eine einfache Rechnung in der Form:

10)
$$m_k = -\frac{\left| \begin{matrix} u_{k+1} & u_{k+2} \\ u_{k+1}' & u_{k+2}' \end{matrix} \right|^2}{\Delta \cdot \sqrt{\sum_1^3{}_i u_i^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\left| \begin{matrix} \sum_1^3{}_i u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left| \begin{matrix} u_{k+1} & u_{k+2} \\ u_{k+1}' & u_{k+2}' \end{matrix} \right|} \cos \int_{u_0}^{u} \frac{\Delta \cdot \sqrt{\sum_1^3{}_i u_i^2}\, du}{\left| \begin{matrix} \sum_1^3{}_i u_i^2 & \Sigma u_i u_i' \\ \Sigma u_i u_i' & \Sigma u_i'^2 \end{matrix} \right|} \right\}$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

$$m_l = \frac{+ \psi_l(v)}{\sqrt{\sum_1^3{}_i \psi_i^2 (v)}} \qquad (l = 4, 5, 6)$$

Die hier definierten Flächen stellen den 2. Typus der Flächen dar, deren sämtliche Krümmungslinien sphärisch sind. Sie sind durch die allgemeinste Transformation der höheren Kugelgeometrie von den Mongeschen Gesimsflächen mit konischer Abwicklung, die durch umstehende Formeln bestimmt sind, ableitbar. Zwischen den Koordinaten der Grundkugeln eines jeden der beiden Systeme bestehen 3 lineare Relationen; doch sind, wie leicht einzusehen ist, 3 dieser Gleichungen eine Folge der 3 andern. Man kann sich ausser den Koordinaten u_i auch noch die Grundkugeln des Systems v mit den Koordinaten v_i geben, wenn nur die 6 Relationen erfüllt sind. In der Normalform ist dann

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

und es ergibt sich[1])

$$m_l = \frac{-i \begin{vmatrix} v_{l+1} & v_{l+2} \\ v'_{l+1} & v'_{l+2} \end{vmatrix}^2}{\Delta(v) \sqrt{\sum_4^6{}^i v_i^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\begin{vmatrix} \sum_4^6{}^i v_i^2 & \Sigma v_i v'_i \\ \Sigma v_i v'_i & \Sigma v_i'^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} v_{l+1} & v_{l+2} \\ v'_{l+1} & v'_{l+2} \end{vmatrix}} \cos \int_{v_0}^{v} \frac{\Delta(v) \sqrt{\sum_4^6{}^i v_i^2}\, dv}{\begin{vmatrix} \sum_4^6{}^i v_i^2 & \Sigma v_i v'_i \\ \Sigma v_i v'_i & \Sigma v_i'^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$(l = 4, 5, 6)$$

Bei den allgemeinsten Flächen, deren Bestimmung auf die Bestimmung einer Gesimsfläche mit konischer Abwicklung zurückführbar, also mittels einer Quadratur zu erledigen ist, liegen die Krümmungslinien u auf Kugeln, die eine Dupinsche Cyklide umhüllen und von der Fläche unter beliebigen Winkeln geschnitten werden. Die Grundkugeln v berühren 2 feste Kugeln, die zu der Cyklide in einer gewissen Beziehung stehen und werden von der Fläche unter einem Winkel geschnitten, der sich aus einer linearen Relation zwischen den v_i ergibt.

[1]) Die cyklische Vertauschung findet zwischen v_4, v_5 und v_6 statt; es bedeutet: $v'_i = \frac{\partial v_i}{\partial v}$.

Diese Familie von Flächen enthält bemerkenswerte spezielle Fälle. Es seien nur diejenigen Flächen erwähnt, die eine Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte eine Gerade erfüllen, orthogonal schneiden, während die Krümmungslinien des 2. Systems auf einem Ebenenbüschel liegen, dessen Achse die erwähnte Gerade ist. Hieher gehören unter andern die Enneperschen Flächen konstanter Krümmung.

Gehen wir zur Liniengeometrie über, so können wir den allgemeinsten Typus der hiehergehörigen Flächen am einfachsten durch die Regelflächen charakterisieren, die den von den beiden Grundkugelsystemen gebildeten Röhrenflächen entsprechen. Die infolge der einheitlichen Gestalt, unter der die Linienkoordinaten der W-Kongruenz erscheinen, naheliegende Vermutung, dass diese beiden Regelflächen vom selben Typus sind, bestätigt sich nicht wegen der Rolle, die der ausgezeichnete Komplex spielt: die Dupinsche Cyklide geht in ein Hyperboloid über, während der von den Grundkugeln v gebildeten Röhrenfläche eine Regelfläche entspricht, die ausser ihren Erzeugenden noch 2 Gerade enthält.

III. 2 Relationen $u_5 = u_6 = 0$

Zur Erledigung dieses Falles ist, wie bereits bekannt, die Kenntnis einer partikulären Lösung notwendig. Es ist

$$m_k = \int \sigma\, u_k\, d\,u \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$
$$m_l = \psi_l(v) \qquad (l = 5, 6)$$

Man kann, weil keine Gleichung von der Form[1])

$$\sum_1^4{}_k\, f_k(v)\, m_k = 0$$

besteht, nur auf eine Weise eine Relation von der Form

$$\sum_1^6{}_k\, f_k(v)\, m_k = 0$$

---

[1]) Die Folge dieser Gleichung wäre $\sum_1^4{}_k\, f_k(v)\, u_k = 0$, was im allgemeinen 2 weitere Relationen zwischen den u_k bedingen würde.

konstruieren, in der $f_k\,(k = 1, 2, 3, 4)$ Null ist, f_5 und f_6 von Null verschieden und bis auf einen Faktor bestimmt sind.

d. h. die längs einer Krümmungslinie $v = \text{const}$ aufeinanderfolgenden Kugeln der W-Kongruenz gehören einem linearen Komplex an und schneiden also eine Kugel unter gleichem Winkel. Die von ihnen gebildete Röhrenfläche hat 2 (oder eine)[1]) sphärische Krümmungslinien. Aufeinanderfolgende Röhrenflächen $v = \text{const}$ schneiden sich im allgemeinen in einer nicht sphärischen Krümmungslinie und deshalb sind auch die Krümmungslinien $v = \text{const}$ der Enveloppe im allgemeinen nicht sphärisch.

Doch kann man, wenn man für σ einen partikulären Wert wählt, der von v unabhängig ist,[2]) Brennflächen erhalten, deren beide Systeme von Krümmungslinien sphärisch sind. Die erhaltenen Flächen sind dann wieder die im I. Fall behandelten Flächen mit 2 Systemen sphärischer Krümmungslinien, jedoch unter Zugrundelegung desjenigen Grundkugelsystems, über dem auch Flächen mit nur einem System sphärischer Krümmungslinien möglich sind. Diese letzteren Flächen kann man finden, wenn man von einer auf irgend eine Weise erhaltenen Fläche mit 2 Systemen sphärischer Krümmungslinien, die diesem Typus angehört, ausgeht; denn dann ist das zur Auflösung von

$$\sum_1^4{}_k \left(\int \sigma\, u_k\, d\, u\right)^2 = C\,(v)$$

notwendige partikuläre Integral bekannt und die Gleichung reduziert sich auf die unter II. behandelte.

Die wesentlichste Eigenschaft der entsprechenden Strahlenkongruenzen ist die, dass die Regelflächen $v = \text{const}$ linearen

[1]) Je nachdem der Schnitt der Röhrenfläche mit der Grundkugel eine reduzible Kurve ist oder nicht.

[2]) Wenn nicht mindestens 2 lineare Relationen zwischen den u_i bestehen, verliert in diesem Fall, wie leicht einzusehen, die Lösung ihre Bedeutung.

Komplexen angehören und also je 2 Haupttangentenkurven enthalten, die Komplexkurven sind, aber den Brennflächen im allgemeinen nicht angehören.

Vollständig zu behandeln sind noch die Fälle mit 4, 3 und auch 2 Relationen, wenn diese Relationen sämtlich oder teilweise von der Form $u_h + i\,u_k = 0$ sind. Diese Fälle bieten namentlich vom Standpunkt der Kugelgeometrie geringes Interesse; die dabei auftretenden Gleichungen für σ sind dieselben wie in den betrachteten Fällen.

II. Teil.

§ 9.

Eine dem Problem der sphärischen Abbildung verwandte Aufgabe.

Die Ableitung der Laplaceschen Gleichung, der die homogenen Koordinaten der Kugeln einer W-Kongruenz, deren Brennflächen ebene oder sphärische Krümmungslinien haben, genügen, gilt, wie wir gesehen haben, nicht mehr, wenn sich die Kugeln der Kongruenz zu Punkten zusammenziehen, also beide Brennflächen zusammenfallen. Die homogenen Kugelkoordinaten gehen dann in die pentasphärischen Koordinaten der Punkte einer Fläche über, die einer ähnlichen Laplaceschen Gleichung genügen. Letztere Gleichung kommt meist in derjenigen Form zur Verwendung, in der sie die Koordinaten x, y, z der Punkte der Fläche und ausserdem $x^2 + y^2 + z^2$ zu partikulären Integralen hat:[1])

1) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0$$

Doch nimmt bei Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien nicht diese Gleichung selbst, sondern die für das sphärische Bild der Fläche analog gebildete[2])

[1]) Bianchi, pag. 111. $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$ sind die für das Linienelementquadrat der Fläche $(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 = ds^2)$ gebildeten Christoffelschen Symbole. In unserem Fall ist $F = 0$.

[2]) Bianchi, pag. 122 und 141. $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}'$ sind die für das Linienelementquadrat der Bildkugel $(e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2 = ds'^2)$ gebildeten

$$2) \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0$$

eine besonders einfache Gestalt an.

Wie Cosserat[1]) gezeigt hat, verschwindet für Flächen mit ebenen Krümmungslinien $u =$ const die Invariante k der Differentialgleichung (2), für Flächen mit sphärischen Krümmungslinien $u =$ const aber die Invariante

$$k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 lgk}{\partial u \partial v}$$

Die Gleichung (2) ist also vom 1., bezw. 2. Rang in Bezug auf v lösbar.

Die sich nun anschliessende Aufgabe, geeignete Integrale der Gleichung (2) auszuwählen, die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien bestimmen, hat Wälsch[2]) gelöst.

Hat man nun ein Orthogonalsystem der Kugel, das man als sphärisches Bild einer auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche mit einem System ebener oder sphärischer Krümmungslinien auffassen kann, so ist die Gleichung (2) nach den Cosseratschen Sätzen immer integrierbar. Das allgemeinste derartige Orthogonal-System kann aber auf mannigfache Weise, auch unter Vermeidung jeder Quadratur, angegeben werden. Wir kommen hierauf zurück. Oder: kann man auf einer Fläche, von der man weiss, dass das eine System von Krümmungslinien eben oder sphärisch ist, alle Krüm-

---

Christoffelschen Symbole. Ist die Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen, so ist $f = 0$, also

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial lg\sqrt{e}}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial lg\sqrt{g}}{\partial u}$$

Der Differentialgleichung (2) genügen die Richtungskosinus der Flächennormale (X, Y, Z) und der Abstand (W) der Tangentialebene vom Anfangspunkt.

[1]) Cossérat, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, tome IV, pag. 18.

[2]) E. Waelsch, Sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques. Comptes rendues 128, pag. 920–922.

mungslinien bestimmen, so erledigt sich die Aufgabe, alle Flächen zu finden, die mit der gegebenen das sphärische Bild der Krümmungslinien gemeinsam haben, durch Quadraturen.

Kann man aber für eine Fläche das Problem der sphärischen Abbildung lösen, so kann man auch das allgemeinste normale Kreissystem finden, das die gegebene Fläche zu einer Orthogonalfläche hat. Jede weitere Orthogonalfläche ist dann der gegebenen Fläche als Brennfläche eines W-Kugelsystems zugeordnet.[1])

Kennt man also die Krümmungslinien einer Fläche mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien, so kann man alle W-Kugelkongruenzen angeben, die sie zur einen Brennfläche haben.[2])

Gehen wir nun zur Liniengeometrie über, so ergibt sich der Satz: Kennt man die Haupttangentenkurven einer Fläche, deren Haupttangentenkurven des einen Systems linearen Komplexen angehören, so kann man alle W-Strahlensysteme angeben, die die Fläche zur einen Brennfläche haben. Die Bestimmung der W-Strahlensysteme mit einer gegebenen Brennfläche ist aber identisch mit der Bestimmung der ∞ kleinen Verbiegungen dieser Fläche und mit der Bestimmung aller Flächen, die ihr durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. Wir haben hier eine Verallgemeinerung des Satzes, dass sich die Bestimmung der ∞ kleinen Verbiegungen der Regelflächen auf die Integration der

---

[1]) Man vergl. z. B. Bianchi, Kap. 13.

[2]) Unter den 2. Brennflächen sind sicher solche, deren Krümmungslinien ebenfalls sphärisch sind. (cf. § 3.) — Das Problem der sphärischen Abbildung führt nur bei Flächen mit ebenen Krümmungslinien auf lauter Flächen derselben Art. Mit den Flächen mit sphärischen Krümmungslinien haben allgemeinere Flächen das sphärische Bild gemeinsam: die längs einer Krümmungslinie, die sphärisch ist, berührenden Krümmungskugeln des andern Systems schneiden eine feste Kugel unter gleichem Winkel. (Blutel.)

Riccatischen Gleichung der Haupttangentenkurven und auf darauffolgende Quadraturen zurückführen lässt.[1])

Darboux hat eine Methode angegeben, das Problem der sphärischen Abbildung auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit gleichen Invarianten (Moutardsche Gleichung) zurückzuführen. Dann führt die Anwendung der Lieschen Transformation auf eine Fläche, für die das Problem der ∞ kleinen Verbiegungen auf dieselbe Gleichung führt;[2]) von der nämlichen Gleichung hängt aber die Bestimmung der auf die Haupttangentenkurven bezogenen Fläche selbst ab, wenn man die Lelieuvreschen Formeln benützt.

Das Wesen der Darbouxschen Methode liegt also darin, dass man in der Kugelgeometrie diejenigen Grössen aufstellt, die den bei den Lelieuvreschen Formeln in der Liniengeometrie zur Verwendung kommenden partikulären Integralen entsprechen.

In der Liniengeometrie, wo die Methode symmetrische Formeln gibt, liegen nur wenig Anwendungen vor, indem nur die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = 0$$

entsprechenden Gebilde untersucht wurden.[3]) [4])

In der Kugelgeometrie hingegen, wo die Methode wegen der verloren gehenden Symmetrie-Verhältnisse wesentlich komplizierter wird, wurde sie von Darboux in ausgedehntem Masse zur Bestimmung der Flächen mit ebenen und sphärischen Krümmungslinien benutzt. Die dabei auftretende Moutardsche Gleichung

---

[1]) z. B. Bianchi, pag. 310.

[2]) Darboux, leçons, tome IV., livre VIII, chap. 8.

[3]) Man vergl. z. B. Bianchi, pag. 133 und 323; Darboux III, pag. 372.

[4]) Dass die den Regelflächen entsprechende Moutardsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = M \Theta$$

vom 2. Rang integrierbar ist, scheint nicht bemerkt worden zu sein.

3) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = M \Theta$$

hat die Eigenschaft, vom 1., 2. oder 3. Rang integrierbar zu sein.[1])

Wir wissen also auch, dass die Bestimmung aller Flächen, deren Haupttangentenkurven des einen Systems linearen Komplexen angehören, mittels der Formeln von Lelieuvre, sowie die Bestimmung der ∞ kleinen Verbiegungen dieser Flächen auf eine Gleichung von der Form (3) führt, die vom 1., 2. oder 3. Rang lösbar ist. Dieser Satz wird im nächsten Paragraphen genauer ausgeführt werden und zwar unabhängig von der Darbouxschen Theorie der Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

Hier soll noch untersucht werden, welche Beziehung zwischen 2 Flächen besteht, auf denen sich die Haupttangentenkurven entsprechen, wenn die durch die Liesche Transformation zugeordneten Flächen der Kugelgeometrie gleiche sphärische Abbildung der Krümmungslinien haben.

Wir gehen von den Lieschen Transformationsformeln aus. Es seien ξ, η, ζ die Punktkoordinaten einer auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche Σ des Kugelraumes, Ξ, H, Θ die Koordinaten des sphärischen Bildes, Ω der Abstand der Tangentialebene vom Anfangspunkt; ferner sei

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \pi = -\frac{\Xi}{\Theta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \varkappa = -\frac{H}{\Theta}$$

Die analogen Grössen für die entsprechende Fläche S des Linienraumes sollen mit x, y, z, X, Y, Z, W, p, q bezeichnet werden. Dann lauten die Lieschen Transformationsformeln:

4) $$\begin{aligned} \xi + i\,\eta + x\,\zeta + z &= 0 \\ x\,(\xi - i\,\eta) - \zeta - y &= 0 \end{aligned}$$

Wenden wir, um x, y, z zu berechnen, die allgemeine Theorie der Berührungstransformation an und differentiieren (4) bei festem x, y, z.

[1]) Darboux, leçons, tome IV., livre VIII, chap. 9 und 11.

$$d\xi + i\,d\eta + x\,d\zeta = 0$$
$$x(d\xi - i\,d\eta) - d\zeta = 0$$

Hieraus eliminieren wir mit Hilfe von

$$d\zeta = \pi\,d\xi + \varkappa\,d\eta$$

das Verhältnis $\frac{d\xi}{d\eta}$ und erhalten dann eine 3. Gleichung, die zusammen mit (4) die Berechnung von x, y, z ermöglicht. Man erhält:

5)
$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + \pi^2 + \varkappa^2}}{i\varkappa - \pi}$$
$$y = x(\xi - i\eta) - \zeta$$
$$z = -(\xi + i\eta) - x\zeta$$

Nun ergibt die Transformation der Fläche Σ 2 in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugierte Flächen S_1 und S_2, zwischen deren Elementen folgende Beziehung besteht.[1])[2])

$$x_{1,2} = -q_{2,1} = \frac{Y_{2,1}}{Z_{2,1}}$$
$$y_{1,2} = p_{2,1} = -\frac{X_{2,1}}{Z_{2,1}}$$
Also $$z_{1,2} = z_{2,1} - x_{2,1} \cdot p_{2,1} - y_{2,1}\,q_{2,1} = \frac{W_{2,1}}{Z_{2,1}}$$

Ist also

$$f(x\,y\,z) = 0$$

die Gleichung einer der beiden Flächen, so ist die Gleichung der in Bezug auf den ausgezeichneten Komplex konjugierten Fläche

$$f\left(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z}, \frac{W}{Z}\right) = 0$$

Dasselbe gilt, wenn die beiden Flächen S_1 und S_2 eine irreducible Fläche bilden.

---

[1]) Lie-Scheffers, Berührungstransformationen, pag. 467.

[2]) Die beiden Brennflächen sind durch die Indices 1,2 unterschieden.

Nun folgt aus den Gleichungen (5)

$$x = \frac{-\Theta+1}{+iH-\Xi} \qquad \frac{X}{Z} = -\frac{-\Theta+1}{iH-\Xi}(\xi - i\eta) + \zeta$$

$$6)\quad y = \frac{-\Theta+1}{+iH-\Xi}(\xi - i\eta) - \zeta \qquad \frac{Y}{Z} = \frac{-\Theta+1}{iH-\Xi}$$

$$z = -(\xi + i\eta) - \frac{-\Theta+1}{iH-\Xi}\zeta$$

Uebertragen wir nun eine Anzahl von Flächen mit gleichem sphärischen Bild[1]) in den Linienraum, so gehen Flächen hervor, auf denen sich die Haupttangentenkurven entsprechen. Betrachten wir ferner im Hinblick auf die Formeln (6) die Punkte aller übertragenen Flächen, die einem bestimmten Punkt der Bildkugel im Kugelraume entsprechen, so sehen wir, dass für sie x und $\frac{Y}{Z}$ auf allen Flächen denselben Wert haben.

Das Problem der sphärischen Abbildung geht also in folgende Aufgabe über: Man soll alle einer gegebenen Fläche (x, y, z) durch punktweises Entsprechen der Haupttangentenkurven zugeordneten Flächen $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ finden, für welche jeder Schnitt mit einer Ebene $x = \text{const}$ in einen ebensolchen Schnitt übergeht und zugleich jeder durch eine Ebene $\frac{Y}{Z} = \text{const}$ auf der Bildkugel ausgeschnittene Kreis in sich transformiert wird.

Wir setzen also

$$7)\qquad \bar{x} = x$$
$$\bar{Y} = \mu Y, \quad \bar{Z} = \mu Z$$

und wenden die Formeln von Lelieuvre[2]) an, indem wir setzen:

$$\xi = \sqrt{\varrho}\, X, \quad \eta = \sqrt{\varrho}\, Y, \quad \zeta = \sqrt{\varrho}\, Z$$
$$\xi = \sqrt{\bar{\varrho}}\, X, \quad \eta = \sqrt{\bar{\varrho}}\, Y, \quad \zeta = \sqrt{\varrho}\, Z$$

[1]) Der Krümmungslinien.

[2]) Die hier gebrauchte Bezeichnung ist Bianchi entnommen. pag. 132.

Dann ist etwa (nach (7))

8) $$\bar{\eta} = \nu\,\eta, \quad \zeta = \nu\,\zeta$$

Zufolge der Gleichung (7) ist auch

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}$$

also nach den Lelieuvreschen Formeln:

9) $$\begin{vmatrix} \bar{\eta} & \bar{\zeta} \\ \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}$$

und analog bei Differentiation nach v. Ersetzen wir nun $\bar{\eta}$, ζ, $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial u}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$ durch ihre aus (8) berechneten Werte, so ergibt sich aus (9)

$$\nu^2 = 1$$

Für ν brauchen wir aber wegen des doppelten Vorzeichens von $\sqrt{\varrho}$ nur den Wert $+1$ zu beachten, so dass wir setzen können

10) $$\bar{\eta} = \eta, \quad \bar{\zeta} = \zeta$$

Da aber die Moutardsche Gleichung,

11) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial v} = M \cdot \Theta$$

der $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ genügen, schon durch ein einziges partikuläres Integral vollständig bestimmt ist, so ist sie mit derjenigen identisch, der ξ, η, ζ genügen. Kann man also diese Gleichung allgemein lösen und bezeichnet mit $\bar{\xi}$ ein 4. partikuläres Integral, so ist die dem Problem der sphärischen Abbildung entsprechende Transformation durch folgende Gleichungen ausgeführt:

12)
$$\bar{x} = x$$
$$\bar{y} = \int \left[\begin{vmatrix} \bar{\xi} & \zeta \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} \bar{\xi} & \zeta \\ \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} dv \right]$$
$$\bar{z} = \int \left[\begin{vmatrix} \eta & \bar{\xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial u} \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} \eta & \bar{\xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial v} \end{vmatrix} dv \right]$$

Da aber von der Integration der Gleichung (11) auch die Lösung des Problems der ∞ kleinen Verbiegungen abhängt, ist dieses mit unserer Transformation gleichzeitig erledigt.

Um nun diese Transformation für die Bestimmung der Flächen nutzbar zu machen, auf denen die Haupttangentenkurven des einen Systems linearen Komplexen angehören, gehen wir auf die Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zurück. Zu jeder solchen Fläche kann man bekanntlich[1]) eine von gleicher Art angeben, die mit ihr die sphärische Abbildung gemeinsam hat und deren Grundkugeln durch einen Punkt gehen (oder eine gegebene Kugel senkrecht schneiden). Führen wir nun eine Transformation mittels reziproker Radien aus, deren Zentrum der Schnittpunkt der sämtlichen Grundkugeln ist, so ergibt sich aus jeder Fläche mit sphärischen Krümmungslinien eine solche mit ebenen Krümmungslinien, und unter den Flächen, die mit letzterer gleiche sphärische Abbildung haben, befinden sich Röhrenflächen, deren erzeugende Kugeln durch einen festen Punkt gehen oder eine Kugel senkrecht schneiden.

Umgekehrt kann man, von diesen besonderen Röhrenflächen, auf denen man die Krümmungslinien bestimmen kann, ausgehend, alle Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien ableiten. Die bei dem Problem der sphärischen Abbildung auftretenden Laplaceschen Differentialgleichungen sind vom 1., bezw. 2. Range lösbar.

[1]) Darboux IV., chap. 11, pag. 252.

Gehen wir nun in den Linienraum über, so haben wir von den Linienflächen auszugehen, die ausser ihren Erzeugenden noch eine Gerade enthalten und auf denen wir die Haupttangentenkurven bestimmen können. Führen wir nun die oben auseinandergesetzte Transformation aus, so erhalten wir alle den Flächen mit ebenen Krümmungslinien entsprechenden Flächen. Eine der Transformation mittels reciproker Radien entsprechende Kollination und nochmalige Anwendung der genannten Transformation gibt die allgemeinsten Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören.

Die bei der analytischen Formulierung auftretenden Moutardschen Differentialgleichungen haben gleiche Invarianten und sind vom 1., 2. oder 3. Rang lösbar; auf die Durchführung sei verzichtet.

§ 10.

Analytische Darstellung der Flächen, deren Haupttangentenkurven $u = \text{const}$ linearen Komplexen angehören.

Es sei eine Schar von linearen Komplexen durch die Gleichung

$$1) \qquad \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k a_{ik}(u)\, x_i\, d\, x_k = 0$$

gegeben; dabei sollen die $a_{ik}(u)$, für die die Relationen

$$a_{ik} = -a_{ki}$$
$$a_{ii} = 0$$

gelten, so bestimmt sein, dass

$$2) \qquad a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = 1$$

ist; ferner sei

$$x_4 = 1.$$

Dann sind die Richtungskosinus einer einem Punkt x_1, x_2, x_3 durch einen der Komplexe zugeordneten, durch ihn hindurchgehenden Ebene, die zugleich die Schmiegungsebene jeder durch den Punkt gehenden Kurve des Komplexes ist, durch folgende Ausdrücke gegeben, in denen ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist:[1])

$$3) \qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}[-a_{13}x_3 - a_{12}x_2 - a_{14}]$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}[a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}]$$

$$X_3 = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}[a_{23}x_2 + a_{13}x_1 - a_{34}]$$

Quadrieren wir diese Gleichungen und addieren sie, so folgt

$$4) \qquad \varrho = [-a_{13}x_3 - a_{12}x_2 - a_{14}]^2 + [a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}]^2 + [a_{23}x_2 + a_{13}x_1 - a_{34}]^2$$

Das ist aber ein in der Theorie des linearen Komplexes bekannter Ausdruck; es ist nämlich

$$5) \qquad T = \frac{1}{\varrho}$$

die Torsion einer jeden durch den betreffenden Punkt hindurchgehenden Kurve, die dem linearen Komplex angehört.[2])

Wenn nun eine auf einer Fläche liegende Kurvenschar $u = \text{const}$ einer Schar linearer Komplexe angehört, so dass die Schmiegungsebenen der Kurven Tangentialebenen der Fläche sind, so sind die Kurven die Haupttangentenkurven des einen Systems. Dann kennen wir aber auch das Krümmungsmass K der Fläche in jedem Punkt; nach dem Enneperschen Satz[3]) über die Torsion der Haupttangentenkurven ist

$$6) \qquad K = -T^2 = -\frac{1}{\varrho^2}$$

[1]) Lie-Scheffers, Berührungstransformationen, pag. 231.
[2]) Lie-Scheffers, Berührungstransformationen, pag. 233.
[3]) Bianchi, pag. 121.

also

$$\varrho = \sqrt{\frac{-1}{K}}$$

Nun führt die Substitution

7) $$\sqrt{\varrho}\, X_1 = \xi, \quad \sqrt{\varrho}\, X_2 = \eta, \quad \sqrt{\varrho}\, X_3 = \zeta$$

auf die Grössen ξ, η, ζ, die in den Formeln von Lelieuvre[1]) auftreten und partikuläre Integrale derselben Moutardschen Gleichung

8) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = M\, \Theta$$

sind. Dann gehen die Gleichungen (3) über in

9) $$\begin{aligned} \xi &= -\alpha_{13} x_3 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{14} \\ \eta &= \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 - \alpha_{24} \\ \zeta &= \alpha_{23} x_2 + \alpha_{13} x_1 - \alpha_{34} \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser 3 Gleichungen mit α_{23}, α_{31}, α_{13} und nachfolgender Addition ergibt sich unter Benutzung von (2)

10) $$\xi\, \alpha_{23} + \eta\, \alpha_{31} + \zeta\, \alpha_{12} = -1$$

Diese Gleichung soll uns zur Bestimmung von M dienen.

Differentiieren wir diese Gleichung nach u und v und berücksichtigen, dass ξ, η, ζ partikuläre Integrale von (8) sind, so folgt

$$\left(\alpha'_{23} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \alpha'_{31} \frac{\partial \eta}{\partial v} + \alpha'_{12} \frac{\partial \zeta}{\partial v}\right) + M\,(\alpha_{23}\, \xi + \alpha_{31}\, \eta + \alpha_{12}\, \zeta) = 0$$

oder wegen (10)

11) $$\alpha'_{23} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \alpha'_{31} \frac{\partial \eta}{\partial v} + \alpha'_{12} \frac{\partial \zeta}{\partial v} = M$$

also durch Integration nach v

[1]) Die Grössen ξ, η, ζ, ϱ, M haben dieselbe Bedeutung wie bei Bianchi, pag. 132.

11a) $$\alpha'_{23}\,\xi + \alpha'_{31}\,\eta + \alpha'_{12}\,\zeta = \int M\,dv$$

Die bei der Integration eingehende arbiträre Funktion von u soll durch das Zeichen des unbestimmten Intergrals angedeutet werden.

Auf ganz ähnliche Weise können wir nun nacheinander folgende Gleichungen erhalten:

12) $$\alpha''_{23}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \alpha''_{31}\frac{\partial\eta}{\partial v} + \alpha''_{12}\frac{\partial\zeta}{\partial v} = \frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv$$

12a) $$\alpha''_{23}\,\xi + \alpha''_{31}\,\eta + \alpha''_{12}\,\zeta = \int\left[\frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right]dv$$

13) $$\alpha'''_{23}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \alpha'''_{31}\frac{\partial\eta}{\partial v} + \alpha'''_{12}\frac{\partial\zeta}{\partial v} = -M\int\left[\frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right]dv + \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right]$$

13a) $$\alpha'''_{23}\,\xi + \alpha'''_{31}\,\eta + \alpha'''_{12}\,\zeta = \int\left[-M\int\left[\frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right]dv + \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right]\right]dv$$

Eliminieren wir nun $\frac{\partial\xi}{\partial v},\ \frac{\partial\eta}{\partial v},\ \frac{\partial\zeta}{\partial v}$ aus (11), (12), (13) und der aus (10) folgenden Gleichung

$$\alpha_{23}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \alpha_{31}\frac{\partial\eta}{\partial v} + \alpha_{12}\frac{\partial\zeta}{\partial v} = 0$$

so ergibt sich folgende Gleichung zur Bestimmung von M:

14) $$\begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha'_{23} & \alpha'_{31} & \alpha'_{12} & 1 \\ \alpha''_{23} & \alpha''_{31} & \alpha''_{12} & \dfrac{\partial\, lg\, M}{\partial u} - \int M\,dv \\ \alpha'''_{23} & \alpha'''_{31} & \alpha'''_{12} & -\int\left[\dfrac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right]dv + \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial u} & M\int M dv \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

Differentiieren wir diese Gleichung nach v und setzen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha'_{23} & \alpha'_{31} & \alpha'_{12} \\ \alpha''_{23} & \alpha''_{31} & \alpha''_{12} \end{vmatrix} = \Delta$$

so folgt nach einer einfachen Umformung:

$$15) \quad -\frac{\partial l y}{\partial u}\left[M^2\left(M - \frac{\partial^2 l y M}{\partial u \partial v}\right)\right] + \int M dv + \frac{\partial l y \Delta}{\partial u} = 0$$

und hieraus durch abermaliges Differentiieren eine partielle Differentialgleichung für M:

$$16) \quad \frac{\partial^2 l y}{\partial u \partial v}\left[M^2\left(M - \frac{\partial^2 l y M}{\partial u \partial v}\right)\right] - M = 0$$

Diese Gleichung sagt aber gerade aus, dass die Moutardsche Gleichung (8)

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = M\Theta$$

vom 3. Range integrierbar ist. Denn bilden wir nach der allgemeinen Rekursionsformel[1]) für die Invarianten einer Laplaceschen Gleichung:

$$h_{i+1} = 2h_i - k_i - \frac{\partial^2 l y h_i}{\partial u \partial v}$$

$$k_{i+1} = h_i$$

die Invarianten der Gleichung (8), so ist, weil

$$h = k = M$$

ist:

$$h_1 = M - \frac{\partial^2 l y M}{\partial u \partial v}, \quad k_1 = M$$

$$h_2 = M - \frac{\partial^2 l y}{\partial u \partial v}\left[M^2\left(M - \frac{\partial^2 l y M}{\partial u \partial v}\right)\right]$$

---

[1]) Darboux II., pag. 29.

Die allgemeinste Funktion M, die der Gleichung (16) genügt, hat Darboux[1]) bestimmt; desgleichen das allgemeinste partikuläre Integral Θ der Gleichung (8).

Bezeichnet man mit $U(u)$, $U_1(u)$, $V(v)$, $V_1(v)$ vier neue Funktionen und mit U', U_1', V', V_1' ihre Abgeleiteten nach u bezw. v und setzt man

$$17\,a) \qquad H = 2(U_1 - V_1) - \left(\frac{U_1'}{U'} + \frac{V_1'}{V'}\right)(U - V)$$

so ist

$$17\,b) \qquad M = -2\frac{\partial^2 lg H}{\partial u\,\partial v}$$

Da sich nun aus (16) wieder die Gleichungen (15) und (14) durch zwei Quadraturen ableiten lassen, ist hiemit der Weg gegeben, auf dem sich die in $\int M\,dv$ und $\int\left(\frac{\partial M}{\partial u} - M\int M\,dv\right)dv$ eingehenden beiden arbiträren Funktionen von u bestimmen lassen und zwar durch algebraische Operationen.

Die Gleichung (8)

$$18) \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = -2\,\Theta\frac{\partial^2 lg}{\partial u\,\partial v}\left[2(U_1 - V_1) - \left(\frac{U_1'}{U'} + \frac{V_1'}{V'}\right)(U - V)\right]$$

die, wie gesagt, vom 3. Range integrierbar ist, brauchen wir jetzt nicht direkt aufzulösen; wir würden sonst allgemeinere Flächen[2]) erhalten als die gesuchten; sondern die Gleichungen (10), (11a) und (12a) geben uns ein Mittel an die Hand, ξ, η, ζ bei bekanntem M und vorgegebenen Funktionen $a_{23}(u)$, $a_{31}(u)$ und $a_{12}(u)$ zu bestimmen. Es ergibt sich:

[1]) Darboux II., pag. 143 und 144. Dabei sind 2 in M eingehende Funktionen gleich den unabhängigen Veränderlichen gesetzt, eine Einschränkung, die in der folgenden Formel durch eine einfache Umrechnung beseitigt ist.

[2]) z. B. die denjenigen Flächen des Kugelraumes entsprechenden Flächen, welche mit den Flächen mit sphärischen Krümmungslinien u das sphärische Bild gemeinsam haben. — Auf ihnen gehören die Haupttangenten c längs einer Haupttangentenkurve $u = \text{const}$ einem linearen Komplex an.

19) $\xi : \eta : \zeta : 1$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{12} & -\int M\,dv \\ \alpha''_{31} & \alpha''_{12} & \int\left[M\int M\,dv - \frac{\partial M}{\partial u}\right]dv \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha'_{23} & \alpha'_{12} & -\int M\,dv \\ \alpha''_{23} & \alpha''_{12} & \int\left[M\int M\,dv - \frac{\partial M}{\partial u}\right]dv \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & 1 \\ \alpha'_{23} & \alpha'_{31} & -\int M\,dv \\ \alpha''_{23} & \alpha''_{31} & \int\left[M\int M\,dv - \frac{\partial M}{\partial u}\right]dv \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha'_{23} & \alpha'_{31} & \alpha'_{12} \\ \alpha''_{23} & \alpha''_{31} & \alpha''_{12} \end{vmatrix}$$

Bilden wir nun nach den Lelieuvreschen Formeln die Ausdrücke:

20) $$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v} = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und setzen sie in die aus den Gleichungen (9) durch Differentiation nach v hervorgehenden Gleichungen

21) $$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -\alpha_{13}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \alpha_{12}\frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} &= \alpha_{12}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \alpha_{23}\frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} &= \alpha_{23}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \alpha_{13}\frac{\partial x_1}{\partial v} \end{aligned}$$

ein, so zeigt sich, dass diese infolge der Relation (10) tatsächlich erfüllt sind.

In den Gleichungen (9), die aus diesen durch Integration nach v hervorgehen, treten nun die α_{14}, α_{24}, α_{34} als arbiträre Funktionen von u auf. Anderseits bestimmen aber die Lelieuvreschen Formeln x_1, x_2 und x_3 bis auf eine Konstante:

22) $$x_1 = \int\left[-\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} du + \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} dv\right]$$ u. s. w. x_2 und x_3.

Will man also nicht die in M eingehenden Grössen U und U_1 als Funktionen von a_{14}, a_{24} und a_{34} darstellen, was nur durch Auflösen von Differentialgleichungen höherer Ordnung möglich wäre, so muss man darauf verzichten a_{14}, a_{24} und a_{34} willkürlich vorzugeben; sondern man muss die aus (22) berechneten Grössen x_1, x_2 und x_3 in die Formeln (9) einsetzen und erhält dann a_{14}, a_{24} und a_{34} als ganz bestimmte additive, infolge einer Quadratur auftretende Funktionen von u.

Damit ist die analytische Darstellung des allgemeinsten Typus von Flächen, deren Haupttangentenkurven $u = \text{const}$ linearen Komplexen angehören, erledigt.

Bezüglich der Flächen, die den Flächen mit ebenen Krümmungslinien des Kugelraumes entsprechen, sei nur bemerkt, dass die lineare Relation zwischen den Koordinaten der linearen Komplexe, die im ersten Teil der Arbeit immer in der Form

$$u_h + i u_k = 0$$

auftrat, hier, wo wir Plückersche Linienkoordinaten haben, die Form

$$a_{ik} = 0$$

annimmt. Die Gleichung (8) wird dann schon vom 2. Range[1]) lösbar und die analytische Behandlung führt auf kürzere, aber weniger symmetrische Formeln als im allgemeinen Fall. Treten mehrere derartige Relationen auf, z. B. bei den Konoiden, so verschwinden beide Invarianten der Moutardschen Gleichung, ihre Lösung ist vom 1. Rang.

---

[1]) Hieher gehören z. B. die allgemeinsten Regelflächen.

§ 11.

Indirekte Auflösung der Gleichung

$$\sum_{1}^{n+1}{}_i \left(\int \sigma(u, v)\, u_i\, d u\right)^2 = 0\,^{1)}$$

Die Entwicklungen dieses Paragraphen, die mit dem Vorhergehenden in keinem direkten Zusammenhang stehen, führen uns zu Formeln, die unter anderm die allgemeinsten im I. Teil von einem andern Gesichtspunkte aus untersuchten W-Kongruenzen ohne Auflösung von Differentialgleichungen und ohne Quadraturen ergeben; die linearen Komplexe, denen die Kugeln oder Geraden $u = \text{const}$ angehören, erhalten wir dann ebenfalls durch Differentiationen.

1. Bestehen zwischen $(n+1)$ Funktionen m_i und $(n+1)$ Funktionen $u_i\,(u)$ die beiden Gleichungen:

1) $$K_{n-1}^2 \equiv \sum_{1}^{n+1}{}_i\, m_i^2 = 0$$

2) $$M_{n-1}^1 \equiv \sum_{1}^{n+1}{}_i\, u_i\, m_i = 0$$

so liegen die m_i auf einer quadratischen Mannigfaltigkeit K_{n-1}^2 im R_n und zwar für jeden festen Wert von u auf dem Schnitt mit einer linearen Mannigfaltigkeit M_{n-1}^1.

Dann sind zur Festlegung der Punkte der K_{n-1}^2, deren homogene Koordinaten die m_i sind, noch weitere $n-2$ Parameter notwendig: $v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$.

Beseitigen wir nun die homogenen Koordinaten mittels der Gleichungen

3) $$\frac{m_k}{i \cdot m_{n+1}} = X_k \quad (i = \sqrt{-1})$$

---

[1]) Früher war eine etwas andere Gleichung behandelt worden:

$$\sum_{1}^{n}{}_i \left(\int \sigma\, u_i\, d\, u\right)^2 = C\,(v)$$

Die folgenden analytischen Entwicklungen haben für den Fall von vier Grössen m_i eine direkte geometrische Bedeutung im 3. dimensionalen Raum.

so ist

$$4) \qquad K_{n-1}^2 \equiv \sum_1^n{}_i X_i^2 - 1 = 0$$

Geht man von einem Punkt der K_{n-1}^2 zu einem benachbarten über, so folgt:

$$5) \qquad \sum_1^n{}_i X_i \, d X_i = 0$$

Diese Gleichung gibt $n-1$ voneinander unabhängige, der K_{n-1}^2 angehörige „Richtungen“ $\varrho \cdot d X_i$, wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Diejenige Richtung, die auf allen der K_{n-1}^2 angehörigen Richtungen senkrecht steht,[1]) ist durch X_i selbst gegeben zufolge der Gleichung (5); sie sei als Normale bezeichnet.

Ich betrachte nun eine Schar von quadratischen Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^2 im R_n:

$$6) \quad M_{n-1}^2 \equiv \sum_1^n{}_i (x_i - \alpha_i(u))^2 - \sum_1^n{}_i \alpha_i^2(u) = 0, \qquad \alpha_i \equiv \alpha_i(u)$$

für deren jede die Richtung der Normalen durch $x_i - \alpha_i$ bestimmt ist.

2 aufeinanderfolgende M_{n-1}^2 haben dann wieder eine $M_n^{2,1}{}_2$ gemeinsam, deren Gesamtheit wieder eine M_{n-1} bildet, die durch Elimination von u aus den beiden Gleichungen:

$$7) \qquad \begin{cases} \sum_1^n{}_i (x_i - \alpha_i)^2 - \sum_1^n{}_i \alpha_i^2 = 0 \\ \sum_1^n{}_i x_i \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

bestimmt ist.

Diese Diskriminanten-Mannigfaltigkeit M_{n-1} hat in jedem Punkt $n-1$ Richtungen zu eigen, von denen $n-2$ der durch den Punkt gehenden $M_{n-2}^{2,1}$, d. h. 2 aufeinanderfolgenden M_{n-1}^2

[1]) Die Gleichung $\sum_1^n{}_i \alpha_i \beta_i = 0$ ist der Ausdruck dafür, dass die „Richtungen“ α_i und β_i aufeinander „senkrecht stehen“.

ebenfalls angehören.[1]) Die übrig bleibenden $(n-1)$. Richtungen der beiden aufeinanderfolgenden M^2_{n-1} fallen beim Grenzübergang ebenfalls zusammen, so dass die Diskriminanten-Mannigfaltigkeit M_{n-1} in jedem Punkt dieselben $n-1$ in ihr liegenden Richtungen und also auch dieselbe Normale hat wie die erzeugende M^2_{n-1}, deren Richtung durch $(x_i - a_i)$ bestimmt ist $(i = 1, 2 \ldots n)$.

Nun, behaupte ich, kann man die M_{n-1} auf die K^2_{n-1} unter Entsprechen der Parameterwerte u durch Parallelismus der Normalen abbilden, wenn die a_i so gewählt sind, dass

$$8) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial u} = \varphi(u)\frac{u_i}{u_{n+1}}$$

ist; dabei soll $\varphi(u)$ eine noch zu bestimmende Funktion von u sein.

Setzt man also versuchsweise

$$9) \qquad X_i = \frac{x_i - a_i}{\sqrt{\sum_1^n{}^k (x_k - a_k)^2}} = -\frac{x_i - a_i}{\sqrt{\sum_1^n{}^k a_k^2}}$$

dann ist

$$\sqrt{\sum_1^n{}^k a_k^2}\ \sum_1^n{}^i X_i \frac{\partial a_i}{\partial u} = \sum_1^n{}^i x_i \frac{\partial a_i}{\partial u} - \sum_1^n{}^i a_i \frac{\partial a_i}{\partial u}$$

also nach (8) und (7)

$$\sqrt{\sum_1^n{}^k a_k^2}\cdot \varphi(u) \sum_1^n{}^i \frac{u_i}{u_{n+1}} \cdot X_i = -\frac{\varphi(u)}{u_{n+1}} \sum_1^n{}^i u_i a_i$$

und mit Hilfe von (2) ergibt sich

$$\sqrt{\sum_1^n{}^k a_k^2} = \sum_1^n{}^i \frac{u_i}{u_{n+1}} a_i$$

oder

$$10) \qquad \sqrt{\sum_1^n{}^i \left(\int \varphi(u) \frac{u_i}{u_{n+1}} du\right)^2} = \sum_1^n{}^i \frac{u_i}{u_{n+1}} \int \varphi(u) \frac{u_i}{u_{n+1}} du$$

---

[1]) Weil die der $M^{2,1}_{n-2}$ angehörenden Richtungen durch 2 lineare Gleichungen mit n homogenen Veränderlichen bestimmt sind.

Da diese Gleichung tatsächlich eine Funktion $\varphi(u)$ definiert, so ist die besprochene Abbildung möglich; sie auszuführen ist für unsern Zweck nicht notwendig.

Nun transformiere ich die M_{n-1} mittels „reciproker Radien“ in eine M'_{n-1}:

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{\sum_1^n{}_k \bar{x}_k^2}, \qquad \bar{x}_i = \frac{x_i}{\sum_1^n{}_k x_k^2}$$

Da hiebei die

$$M_{n-1}^2 \equiv \sum_1^n{}_i x_i^2 - 2 \sum_1^n{}_i x_i a_i = 0$$

in eine lineare Mannigfaltigkeit übergeht:

$$M'^1_{n-1} \equiv 1 - 2 \sum_1^n{}_i a_i \bar{x}_i = 0$$

so erscheint die M'_{n-1} als Diskriminanten-Mannigfaltigkeit einer Schar linearer Mannigfaltigkeiten.

2. Ich will nun die allgemeinste M'_{n-1} aufstellen und zwar ohne Anwendung von Quadraturen, bezogen auf ein besonderes Orthogonalsystem.

Es seien $c_1(u)$, $c_2(u)$, ... $c_n(u)$ die Koordinaten der Punkte einer Kurve auf der K^2_{n-1}; also ist

$$\sum_1^n{}_i c_i^2 = 1$$

Dann bestimmen n aufeinanderfolgende Punkte der Kurve eine durch sie hindurchgehende lineare Mannigfaltigkeit M'_{n-1}:

$$11) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 - c_1 & \xi_2 - c_2 & \dots & \xi_n - c_n \\ c_1' & c_2' & \dots & c_n' \\ c_1'' & c_2'' & \dots & c_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{(n-1)} & c_2^{(n-1)} & \dots & c_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

oder

11 a) $$\sum_1^n{}^i \xi_i a_i - \Delta = 0$$

wenn man mit ξ_i die laufenden Koordinaten, mit a_i[1]) die Unterdeterminanten von $\xi_i - c_i$ und mit Δ die Determinante: der c_k und ihrer $n-1$ ersten Abgeleiteten bezeichnet.

Wenn nun $h(u)$ eine beliebige Funktion ist, so erzeugt die M_{n-1}^1:

12) $$\sum_1^n{}^i \xi_i a_i - h(u) = 0$$ [1])

die allgemeinste Kurve im R_n, die der gegebenen durch Parallelismus der Tangenten entspricht und die sich aus

13) $$\begin{aligned} \sum_1^n{}^i \xi_i a_i \quad &- h(u) = 0 \\ \Sigma\ \xi_i a_i' \quad &- h' \quad = 0 \\ \cdots \quad &\cdots \quad \cdots \\ \Sigma\ \xi_i a_i^{(n-1)} &- h^{(n-1)} = 0 \end{aligned}$$

bestimmt.

Aus diesem Gleichungssystem, das die Koordinaten ξ_i der Punkte der Kurve bestimmt, lässt sich durch Differentiationen das Folgende ableiten, das die Richtung der Tangente bestimmt:

14) $$\begin{aligned} \sum_1^n{}^i a_i \xi_i' &= 0 \\ \Sigma\ a_i' \xi_i' &= 0 \\ \cdots \quad \cdots &\quad \cdots \\ \Sigma\ a_i^{(n-2)} \xi_i' &= 0 \end{aligned}$$

Zufolge der Definition der a_i ist leicht einzusehen, dass das für die ξ_i' geltende System (14) auch durch die c_i' erfüllt ist und damit ist der Parallelismus der Tangenten bewiesen.[2])

---

[1]) Diese Grössen a_i haben mit den unter 1. mit a_i bezeichneten Grössen nichts gemein.

[2]) d. h. die ξ_i' sind den c_i' proportional; also ist wegen $\sum_1^n{}^i c_i^2 = 1$ und $\sum_1^n{}^i c_i c_i' = 0$ auch $\sum_1^n{}^i c_i \xi_i' = 0$.

Anderseits ist diese Kurve auch die allgemeinste von der verlangten Eigenschaft, da durch den Parallelismus der Tangenten auch der Parallelismus der Schmiegungsebenen und der aufeinanderfolgenden Schmiegungsräume bedingt ist, also nur eine Funktion $h(u)$ eingehen kann.

Nun lege ich durch jeden Punkt ξ der Kurve eine lineare Mannigfaltigkeit M^1_{n-1}, die der Tangential-Mannigfaltigkeit der K^2_{n-1} in dem entsprechenden Punkte c_i parallel ist. Die Gleichung einer solchen Tangential-Mannigfaltigkeit ist:

$$\sum_1^n{}^i c_i(x_i - c_i) = 0$$

also die der parallelen Mannigfaltigkeit durch ξ:

15) $$M^1_{n-1} \equiv \sum_1^n{}^i c_i x_i - \sum_1^n{}^i c_i \xi_i = 0$$

Diese M^1_{n-1} hat die charakteristische und für uns wichtige Eigenschaft, dass jede ihr und der nächstfolgenden gleichzeitig angehörende, durch den Punkt ξ gehende Richtung, in ihm auf der Kurve ξ senkrecht steht, wie aus der 2. Gleichung des Gleichungssystemes (17) unmittelbar ersichtlich ist.

Wir betrachten die Gleichungen:

$$M^1_{n-1} \equiv \sum_1^n{}^i c_i x_i - \sum_1^n{}^i c_i \xi_i = 0$$

16) $$\Sigma\, c_i' x_i - \frac{\partial}{\partial u} \Sigma\, c_i \xi_i = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\Sigma\, c_i^{(n-1)} x_i - \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}} \Sigma\, c_i \xi_i = 0$$

aus denen sich auch die folgenden durch Differentiationen ableiten lassen:

$$\sum_1^n{}^i c_i x_i' = 0$$

17) $$\Sigma\, c_i' x_i' = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\Sigma\, c_i^{(n-2)} x_i' = 0$$

Die n Gleichungen des Systems (16) bestimmen eine Kurve C, deren Tangente, Schmiegungsebene, erster Schmiegungsraum u. s. w. durch die ersten $n-1$, $n-2$, $n-3$ u. s. w. dieser Gleichungen bestimmt sind. Die beiden ersten Gleichungen des Systems bestimmen eine $M^{1,1}_{n-2}$; die durch Elimination von u erhaltene Diskriminanten-Mannigfaltigkeit der M^1_{n-1}, deren „Rückkehrkante" die besprochene Kurve ist, will ich betrachten.

Die einzelne $M^{1,1}_{n-2}$ enthält $n-2$ linear unabhängige Richtungen; bezeichnet man diese mit $\varrho_1 x'_{1i}$, $\varrho_2 x'_{2i}$, $\varrho_3 x'_{3i} \ldots \ldots \varrho_{n-2} x'_{n-2,i}$,[1]) und mit v_1, v_2, $v_3 \ldots v_{n-2}$ variable Parameter, so ergibt sich folgende Parameterdarstellung für die Punkte der $M^{1,1}_{n-2}$:

$$18) \qquad x_i = \xi_i + \sum_1^{n-2} {}_k v_k \cdot \varrho_k x'_{ki}\ ^2)$$

Die Richtungen x'_{ki} ergeben sich aus den beiden ersten Gleichungen von (17) und stehen somit auf der Kurve c und der zu ihr parallelen Kurve ξ in dem Punkt ξ senkrecht. Man kann sie auf folgendem Wege in übersichtlicher Weise bestimmen: Die $(n-1)$ Gleichungen (17) geben die Richtung x'_{1i} der Tangente der Kurve C; lässt man dann die letzte Gleichung hinweg, so bestimmen die übrigen alle der Schmiegungsebene angehörenden Richtungen, von denen wir diejenige x'_{2i} herausnehmen, die auf der Tangente senkrecht steht, also der Gleichung

$$\sum_1^n {}_i x'_{1i} x'_{2i} = 0$$

genügt. Desgleichen gehört dem ersten Schmiegungsraum eine Richtung $x'_{3,i}$ an, die auf der Schmiegungsebene senkrecht

[1]) Die ϱ_λ bestimmen sich aus:

$$\varrho_\lambda^2 \sum_1^n {}_i x'^2_{\lambda i} = 1$$

[2]) Die Richtigkeit dieser Parameterdarstellung folgt unmittelbar aus den beiden ersten Gleichungen (16) und der ersten Gleichung (17).

steht, also den Gleichungen (17) mit Ausnahme der beiden letzten genügt, ausserdem aber den beiden Gleichungen:

$$\sum_1^n{}^i x'_{1i} x'_{3i} = 0$$

$$\sum_1^n{}^i x'_{2i} x'_{3i} = 0$$

So kann man fortfahren und die $n-2$ Richtungen nacheinander berechnen; es ergibt sich:

19)
$$\nu_1 \cdot x'_{1i} = \pm \begin{vmatrix} c_{i+1} & c_{i+2} & \dots & c_{i+n-1} \\ c'_{i+1} & c'_{i+2} & \dots & c'_{i+n-1} \\ — & — & — & — & — \\ c_{i+1}^{(n-3)} & c_{i+2}^{(n-3)} & \dots & c_{i+n-1}^{(n-3)} \\ c_{i+1}^{(n-2)} & c_{i+2}^{(n-2)} & \dots & c_{i+n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

$$\nu_2 \cdot x'_{2i} = \pm \begin{vmatrix} c_{i+1} & c_{i+2} & \dots & c_{i+n-1} \\ c'_{i+1} & c'_{i+2} & \dots & c'_{i+n-1} \\ — & — & — & — & — \\ c_{i+1}^{(n-3)} & c_{i+2}^{(n-3)} & \dots & c_{i+n-1}^{(n-3)} \\ x'_{1,i+1} & x'_{1,i+2} & \dots & x'_{1,i+n-1} \end{vmatrix}$$

u. s. w.; die Faktoren ν_λ und die Vorzeichen sind leicht zu berechnen.

Wie aus der Ableitung hervorgeht, bestehen die Orthogonalitsbedingungen:

20)
$$\sum_1^n{}^i x'_{\lambda i} x'_{\mu i} = 0$$

für alle $\lambda \gtrless \mu \leqq n-2$.

Lässt man endlich u veränderlich und betrachtet die Gesamtheit der $M_{n-2}^{1,1}$, d. h. die Diskriminanten-Mannigfaltigkeit der M_{n-2}^1, so erhält man für die Koordinaten $\bar{x}_i$ ihrer Punkte:

21) $$\bar{x}_i = \xi_i(u) + \sum_1^{n-2}{}_k v_k \cdot \varrho_k(u)\, x'_{ki}(u)$$

Damit haben wir die auf ein besonderes Orthogonalsystem bezogene Parameterdarstellung der unter 1. definierten M'_{n-1}, und zwar der allgemeinsten; denn denkt man sich eine M'_{n-1} gegeben, so kann man den hier verfolgten Weg Schritt für Schritt zurückgehen, bis man zur Kurve a auf der K_{n-2} gelangt.

3. Nachdem nun die allgemeinste M'_{n-1} bestimmt ist, brauchen wir nur die unter 1. gegebene Entwicklung rückwärts zu verfolgen, um die Grössen m_i zu finden.

Zunächst ergibt eine Transformation mittels reciproker Radien die Parameterdarstellung der M_{n-1} selbst:

22) $$x_i = \frac{\bar{x}_i}{\sum_1^n{}_l \bar{x}_l^2} = \frac{\xi_i(u) - \sum_1^{n-2}{}_k v_k \varrho_k x'_{ki}}{\sum_1^n{}_l \left[\xi_l - \sum_1^{n-2}{}_k v_k \varrho_k x'_{kl}\right]^2}$$

Dann gehen die erzeugenden:

$$M^1_{n-1} \equiv \sum_1^n{}_i c_i \bar{x}_i - \sum_1^n{}_i c_i \xi_i = 0$$

über in

23) $$M^2_{n-1} \equiv \sum_1^n{}_k x_k^2 - \sum_1^n{}_i \frac{c_i}{\sum_1^n{}_l c_l \xi_l} x_i = 0$$

oder

23a) $$M^2_{n-1} \equiv \sum_1^n{}_i \left(x_i - \frac{c_i}{2\sum_1^n{}_l c_l \xi_l}\right)^2 - \frac{1}{\left(2\sum_1^n{}_l c_l \xi_l\right)^2} = 0$$

Daraus folgt leicht die Richtung der Normalen:

$$24)\quad X_i = \frac{2\left[\xi_i - \sum_1^{n-2}{}^k v_k x'_{ki}\right]\sum_1^n{}^l c_l \xi_l - c_i \sum_1^n{}^l \left[\xi_l - \sum_1^{n-2}{}^k v_k x'_{kl}\right]^2}{\sum_1^n{}^l \left[\xi_l - \sum_1^{n-2}{}^k v_k x'_{kl}\right]^2}$$

Setzt man nun wie in 1. (3)

$$25)\qquad X_k = \frac{m_k}{i \cdot m_{n+1}}$$

so geht die Gleichung

$$\sum_1^n{}^k X_k^2 = 1$$

über in:

$$26)\qquad \sum_1^{n+1}{}^k m_k^2 = 0$$

Ausserdem ist, wie mit Hilfe von (17) unmittelbar ersichtlich ist,

$$27)\qquad \sum_1^n{}^k X_k \frac{\partial}{\partial u} \frac{c_k}{\sum_1^n{}^l c_l \xi_l} = \frac{\sum_1^n{}^l c'_l \xi_l}{\left(\sum_1^n{}^k c_k \xi_k\right)^2} = \Phi(u)$$

und diese Gleichung ist äquivalent mit:

$$27\,a)\qquad \sum_1^{n+1}{}^k u_k \cdot m_k = 0$$

Zerlegt man nun (24) mit Hilfe von (25) in folgender Weise, wobei man auch (20) benützt:

$$28)\quad \begin{cases} m_i = 2\left[\xi_i - \sum_1^{n-2}{}^k v_k \varrho_k x'_{ki}\right]\sum_1^n{}^l c_l \xi_l \\ \qquad - c_i\left[\sum_1^n{}^l \xi_l^2 - 2\sum_1^n{}^l \xi_l \sum_1^{n-2}{}^k v_k \varrho_k x'_{kl} + \sum_1^{n-2}{}^k v_k^2\right] \\ m_{n+1} = -i \cdot \left[\sum_1^n{}^l \xi_l^2 - 2\sum_1^n{}^l \xi_l \sum_1^{n-2}{}^k v_k \varrho_k x'_{kl} + \sum_1^{n-2}{}^k v_k^2\right] \end{cases}$$

für $i = 1, 2 \ldots n$, so kann man mittels einer einfachen, aber etwas weitschweifigen Rechnung, hauptsächlich auf Grund von (20), die folgenden Gleichungen nachweisen:

29)
$$\sum_1^{n+1 i} \frac{\partial m_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial m_i}{\partial v_k} = 0$$
$$\sum_1^{n+1 i} \frac{\partial m_i}{\partial v_k} \cdot \frac{\partial m_i}{\partial v_l} = 0 \qquad (k \gtrless l)$$

Nun führen die $n + 1$ Relationen:

$$\sum_1^{n+1 i} m_i^2 = 0$$
$$\sum_1^{n+1 i} m_i \frac{\partial m_i}{\partial u} = 0$$
$$\sum_1^{n+1 i} m_i \frac{\partial m_i}{\partial v_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3 \ldots n - 2)$$
$$\sum_1^{n+1 i} m_i u_i = 0, \qquad \left[\sum_1^{n+1 i} \frac{\partial m_i}{\partial v_k} u_i = 0\right]$$

zu folgenden $n + 1$ Gleichungen:

30) $$u_i = \alpha m_i + \beta \frac{\partial m_i}{\partial u} + \sum_1^{n+2 k} \gamma_k \frac{\partial m_i}{\partial v_k} \quad (i = 1, 2 \ldots n, n + 1.)$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\frac{\partial m_i}{\partial v_l}$ für irgend einen Wert von l und addiert sie, so folgt wegen (29)

$$\gamma_l = 0 \quad (l = 1, 2 \ldots n, n + 1)$$

also ist

$$u_i = \alpha m_i + \beta \frac{\partial m_i}{\partial u}$$

Fasst man nun die v_k als Funktionen eines neuen Parameters v auf, so sind die durch (28) definierten Grössen m_i $(n + 1)$ partikuläre Integrale einer Lagrangeschen Gleichung:

31) $$\frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha m_i + \beta \frac{\partial m_i}{\partial u}\right) = 0$$

deren Invariante k verschwindet. Und zwar ist diese Lösung von allgemeinstem Charakter; denn setzt man etwa

$$v_k = \frac{C_k(v)}{C_{n-1}(v)}, \quad \sum_1^{n-2} {}_k C_k^2(v) = C_n(v)$$

und multipliziert die m_i mit $C_{n-1}^2(v)$, so setzen sich ihre Werte aus n Summanden additiv zusammen, die mit willkürlichen, nur durch eine quadratische Relation voneinander abhängigen Funktionen $C_k(v)$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ multipliziert sind.

Vita.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit wurde am 7. Januar 1881 als Sohn des Gymnasialprofessors Max Lagally zu Neuburg a/D. geboren. Zu Bamberg besuchte er die Volksschule. Mehrfacher Wechsel im Aufenthaltsort der Eltern brachte es mit sich, dass er nacheinander Schüler des Alten Gymnasiums zu Bamberg, des Gymnasiums zu Neuburg a/D. und des Alten Gymnasiums zu Regensburg war. Nach Ablegung des Gymnasial-Absolutoriums bezog er im Herbste 1899 die Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München, wo er sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften widmete.